UNIVERSIDAD SAN IGNACIO DE LOYOLA

Modelos de Crecimiento

Ronald Cuela

Contenido

Modelo de Solow-Swan

Supuestos

- Economía cerrada y sin gobierno.

$$Y_t = C_t + I_t \qquad ..(1)$$

- Familias propietarias de las empresas.

$$Y_t = C_t + S_t \qquad ..(2)$$

- Tres factores de producción:
  - Capital (K)
  - Trabajo (L)
  - Tecnología (A)

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t) \qquad ..(3)$$

Modelo de Solow-Swan

Supuestos

- Función de producción con propiedades neoclásicas.
  - Rendimientos constantes a escala.
  - Productividad marginal positiva, pero decreciente
  - Condiciones de Inada
- Tasa de ahorro constante

$$sY_t = S_t = I_t \qquad ..(4)$$

- Tasa de depreciación constante

$$I_t = \overset{\circ}{K}_t + D_t = \overset{\circ}{K}_t + \delta K_t$$

$$\overset{\circ}{K}_t = sY_t - \delta K_t \qquad ..(5)$$

Modelo de Solow-Swan

Supuestos

- Tasa de crecimiento de la población constante

$$\overset{\circ}{L}_t = nL_t$$

- Tasa de crecimiento de la tecnología constante

$$\overset{\circ}{A}_t = gA_t$$

- La tecnología es trabajo-aumentativa

$$F(K_t, A_t, L_t) = F(K_t, (A_t L_t))$$

reemplazando en la ecuación (5)

$$\overset{\circ}{K}_t = sF(K_t, (A_t L_t)) - \delta K_t \qquad ..(6)$$

Modelo de Solow-Swan

Movimiento de capital per cápita efectivo

Teniendo en cuenta:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

Reemplazando en la ecuación (6), obtenemos:

$$\overset{\circ}{k}_t = sf(k_t) - (n + \delta + g)k_t \qquad ..(7)$$

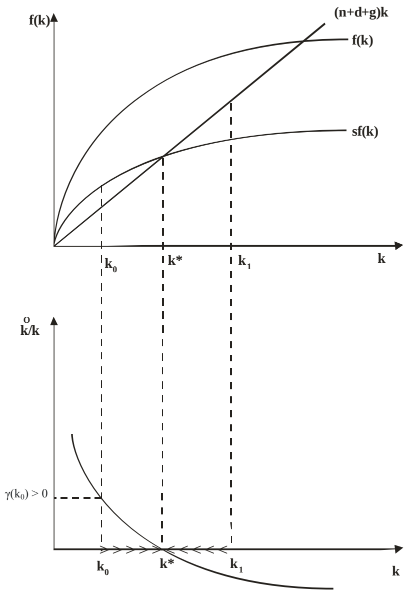
Modelo de Solow-Swan

❖ **Estabilidad y estado estacionario**

$$sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*$$

❖ **Transición a *k****

$$\gamma(k_t) = \frac{\overset{\circ}{k_t}}{k_t} = s\frac{f(k_t)}{k_t} - (n + \delta + g)$$



Modelo de Solow-Swan

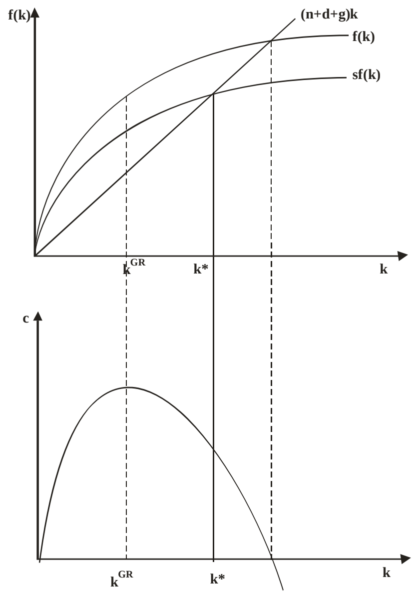
❖ **La regla de oro**

$$\max_k \; c = f(k) - (n + \delta + g)k$$

$$f'(k) = n + \delta + g = s\frac{f(k)}{k}$$

$$s = \frac{kf'(k)}{f(k)} = \alpha(k)$$

❖ **Ineficiencia Dinámica**



Modelo de Solow-Swan

Conclusiones

- El capital, el consumo y la producción en términos de trabajo efectivo (*k, c, y*) se mantienen constantes.
- Las variables per cápita (*K/L, C/L, Y/L*) crecen a la tasa g.
- El Capital, el Consumo y la Producción agregados (K, C, Y) crecen a la misma tasa (n+g).
- La tasa de crecimiento de la renta per cápita es menor cuando mayor es el nivel de renta.
- Los salarios reales deben ser mayores en países con mayor nivel de renta.

Modelo de Solow-Swan

Conclusiones

- El tipo de interés real es menor en países con mayor nivel de renta.
- Países con similares variables exógenas tienden al mismo nivel de renta per cápita.
- El nivel de renta de un país está correlacionado positivamente con la tasa de ahorro (inversión).
- La tasa de crecimiento de la renta per cápita está directamente relacionada con la tasa de inversión de un país.

Modelo de Solow-Swan

Críticas

- La evidencia empírica rechaza la convergencia a un estado de estado estacionario común de todas las economías.
  - Convergencia Absoluta
  - Convergencia Condicional
- La posibilidad de ineficiencia dinámica en el modelo.
  - Restringir las soluciones de k
  - Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Contenido

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Idea

- Incluir microfundamentos al modelo de Solow.
- Endogenizar la tasa de ahorro.
- Similares supuestos al modelo de Solow.

$$\text{Max} \quad \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a :} \quad \overset{\circ}{k} = f(k_t) - c_t - (n+\delta+g)k_t$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Solución del problema

- Mercados competitivos.
- Dictador benevolente.

Se reduce en:

$$\overset{\circ}{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta+g)k_t$$

$$\frac{\overset{\circ}{c}_t}{c_t} = \frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)} \left[f'(k_t) - (\rho+\delta+g) \right]$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Estado Estacionario

$$f(k^*) - c^* - (n+\delta+g)k^* = 0$$

$$f'(k^*) - (\rho+\delta+g) = 0$$

Condiciones de Segundo Orden

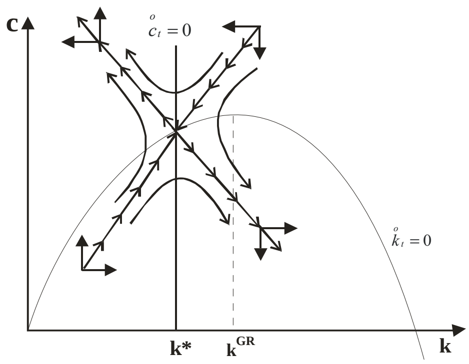
$$Hes(Ham)(c^*,k^*,\lambda^*,t) = \begin{bmatrix} e^{-(\rho-n)t}u''(c^*) & 0 \\ 0 & \lambda^* f''(k^*) \end{bmatrix}$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Dinámica del Modelo

$$J = \left[\frac{\partial(\overset{o}{k},\overset{o}{c})}{\partial(k,c)}\right]_{(k^*,c^*)} = \begin{bmatrix} \rho-n & -1 \\ \frac{c^*}{\sigma(c^*)}f''(k^*) & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{1,2} = \frac{(\rho-n) \pm \sqrt{(\rho-n)^2 - 4\frac{c^*}{\sigma(c^*)}f''(k^*)}}{2}$$



Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Ineficiencia Dinámica

$$f'(k^*) > f'(k^{GR})$$

$$k^* < k^{GR}$$

Convergencia Absoluta y Convergencia Condicional.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Implicaciones

- Capital (*k*)
  - El capital per cápita efectivo en estado estacionario depende de las variables(ρ, *d*, *g*).
  - k^* disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta.
- Consumo (*c*)
  - Relación negativa entre el consumo per cápita y, la tasa de descuento, la tasa de crecimiento de la población, la tasa de depreciación y la tasa de crecimiento de la tecnología.
- Ingreso (*y*)
  - y^* disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Implicaciones

- Retorno del capital: *f'(k)*
  - Relación positiva con el factor de descuento de la utilidad, depreciación y el crecimiento de la tecnología.
- Salarios: *f(k)-kf'(k)*
  - Relación inversa con utilidad, depreciación y el crecimiento de la tecnología.
- Participación del capital (α)
  - Afecta positivamente al capital, producto, consumo y salario. Tiene Relación nula con el retorno de capital.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Contraste Empírico (Kaldor)

- Producto per cápita crece a través del tiempo y este ratio de crecimiento no tiende a disminuir.

$$Ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right) = gt + \varepsilon_t$$

- Capital per cápita crece a través del tiempo.

$$\frac{\overset{\circ}{K}}{K} = g$$

- El ratio de retorno de capital es casi constante.

$$f'(k^*) = n + \delta + g$$

Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Contraste Empírico (Kaldor)

- El ratio de *K – Y* es cercano a un valor constante.

$$\frac{K}{Y}=\frac{\frac{K}{AL}}{\frac{F(K,AL)}{AL}}=\frac{k}{f(k)}$$

- Las participaciones de trabajo y capital físico en el ingreso nacional son casi constantes. Función Cobb-Douglas

$$\frac{KF_K(K,AL)}{F(K,L)}=\alpha \qquad \frac{L.F_L(K,AL)}{F(K,L)}=1-\alpha$$

- El ratio de crecimiento de producto por trabajador difiere a través de los países.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Contraste Empírico (Romer)

- La tasa de crecimiento no varía con el nivel inicial de renta per cápita.
- El crecimiento económico esta correlacionado con el del volumen del comercio.
- Las tasas de crecimiento de la población están correlacionadas negativamente con el nivel de renta.
- La tasa de crecimiento de los factores productivos no es suficiente para explicar el crecimiento del producto per cápita.
- Los trabajadores, cualificados o no, tienden a emigrar de los países de renta baja a los que tienen renta alta.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Conclusiones

- El modelo de crecimiento neoclásico es una herramienta teórica muy importante.
- Inclusión de la tecnología.
- Superación del problema de ineficiencia dinámica y convergencia absoluta.
- Relaciones coherentes con las variables exógenas del modelo. Teóricamente correctas bajo supuestos de un ambiente neoclásico.
- Simplicidad del modelo

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Conclusiones

- El modelo es criticado por reducir bastante la realidad.
- Este modelo no puede explicar todos los hechos estilizados del crecimiento económico.
- No es aplicable para todas las realidades.
- Sin embargo es el modelo más estudiado en cursos de crecimiento económico en el pregrado y postgrado de muchas universidades.
- Modelos de crecimiento endógeno.

Contenido

Modelos de Crecimiento Endógeno

Diferencias con modelos de crecimiento exógeno

- La tasa de crecimiento del producto puede ser positiva.
- La tasa de crecimiento viene dada por factores visibles.
- La economía carece de estado estacionario, la economía está en constante crecimiento.
- No existe relación entre la tasa de crecimiento y el nivel alcanzado por la renta nacional.
- El modelo AK predice que los efectos de recesión temporal serán permanentes.
- No puede haber demasiada inversión, la economía no puede encontrarse en la zona dinámicamente ineficiente.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo Ak (Rebelo, 1991)

$$\text{Max.} \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a} \quad \dot{k}_t = Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t$$

Hamiltoniano:

$$H = e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda_t [Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t]$$

$$\underset{c}{Max} \quad H$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \lambda_t [A - (n+\delta)] = -\mathring{\lambda}_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t = \dot{k}_t$$

$$\text{Lim}_{t\to\infty}(k_t \lambda_t) = 0$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo Ak

Consumo: $$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}(A - \rho - \delta)$$

Interpretación: $$\theta\gamma_c + \rho = A - \delta$$

Beneficio del consumo = beneficio de la inversión.

Estado Estacionario:

$$\gamma_k^* = \gamma_y^* = \gamma^* = \gamma_c = \frac{1}{\theta}(A - \rho - \delta)$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

Modelo Ak - Conclusiones

- En estado estacionario, todas las variables per capita crecen a una tasa constante.
- El consumo siempre crece a la misma tasa. El consumo siempre se encuentra EE.
- El capital y el producto también crecen a la misma tasa. El modelo no presenta transición alguna hacia el EE.
- Todas las variables crecen permanentemente a una tasa constante.
- A diferencia del modelo neoclásico, este modelo no predice la convergencia entre economías, ni absoluta ni condicional.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo con gasto público (Barro, 1990)

Como bien público: No rival y no excluible

$$y_j = Ak_j^{\alpha} G^{1-\alpha}$$

Bien sujeto a congestión: Parcialmente excluible

$$y_j = Ak_j^{\alpha} \left(\frac{G}{K}\right)^{1-\alpha}$$

Bien privado: Rival y excluible

$$y_j = Ak_j^{\alpha} g_j^{1-\alpha}$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo con gasto público

Familias productoras

$$\text{Max.} \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a} \quad \dot{k}_t = (1-\tau_t) A k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t$$

Hamiltoniano:

$$H = e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda_t \left[(1-\tau_t) A k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t \right]$$

$$\underset{c}{Max} \quad H$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \lambda_t \left[(1-\tau_t) \alpha A k_t^{\alpha-1} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta) \right] = -\mathring{\lambda}_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = (1-\tau_t) A k_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t = \dot{k}_t$$

$$\text{Lim}_{t\to\infty} (k_t \lambda_t) = 0$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo con gasto público

Resolviendo $\quad \dfrac{\dot{c}_t}{c_t} = \dfrac{1}{\theta} \left((1-\tau_t) \alpha A \left(\dfrac{g_t}{k_t} \right)^{1-\alpha} - \rho - \delta \right)$

El gobierno financia su gasto con impuestos $\tau_t y_t = g_t$

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta} \left((1-\tau_t) \alpha A^{1/\alpha} \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho - \delta \right)$$

Tamaño óptimo del estado $\qquad \tau^* = 1-\alpha$

$$\gamma_c = \frac{1}{\theta} \left(\alpha^2 A^{1/\alpha} (1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho - \delta \right)$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo con gasto público

Planificador Social

$$\text{Max.} \quad \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a} \quad \dot{k}_t = A k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t - g_t$$

Hamiltoniano:

$$H = e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda_t \left[A k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t - g_t \right]$$

$$\underset{c}{Max} \quad H \qquad\qquad \underset{g}{Max} \quad H$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \lambda_t \left[\alpha A k_t^{\alpha-1} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta) \right] = -\mathring{\lambda}_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = A k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t - g_t = \dot{k}_t$$

$$\text{Lim}_{t\to\infty} (k_t \lambda_t) = 0$$

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Otros modelos de crecimiento

- Modelo de crecimiento con capital Humano (Lucas)
- Modelo de crecimiento con externalidades (Romer)
- Modelo de crecimiento de una economía de las ideas (Romer)

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelo con gasto público

Resolviendo $$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \rho - \delta\right)$$

$$A(1-\alpha)k_t^{\alpha} g_t^{-\alpha} = 1$$

Tasa de crecimiento del PS

$$\gamma_c = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho - \delta\right)$$

Contenido

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

CUADRO 1

Regresiones para el Crecimiento Económico

Variable explicativa:	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Log(PIB per cápita)	-0.0297 (0.0032)	-0.0279 (0.0032)	-0.0263 (0.0032)	-0.0297 (0.0032)	-0.0347 (0.0038)
Años de escolaridad superior masculina	0.0035 (0.0019)	0.0088 (0.0035)	0.0039 (0.0017)	0.0034 (0.0019)	0.0016 (0.0017)
Log(esperanza de vida)	0.0588 (0.0141)	0.0578 (0.0140)	0.0563 (0.0139)	0.0569 (0.0143)	0.0610 (0.0219)
Log(tasa de fertilidad)	-0.0159 (0.0058)	-0.0158 (0.0057)	-0.0116 (0.0055)	-0.0159 (0.0058)	-0.0125 (0.0064)
Estado de derecho	0.0133 (0.0059)	0.0138 (0.0058)	0.0178 (0.0061)	0.0114 (0.0075)	0.0248 (0.0073)
Razón del consumo de gobierno	-0.109 (0.025)	-0.102 (0.025)	-0.101 (0.027)	-0.111 (0.025)	-0.184 (0.030)
Apertura internacional	0.0149 (0.0044)	0.0137 (0.0043)	0.0108 (0.0044)	0.0149 (0.0044)	0.0080 (0.0038)
Tasa de inflación	-0.0142 (0.0105)	-0.0120 (0.0104)	-0.0199 (0.0097)	-0.0132 (0.0101)	-0.0138 (0.0087)
Razón de inversión	0.057 (0.026)	0.054 (0.026)	0.069 (0.024)	0.059 (0.026)	0.039 (0.030)
Crecimiento de términos de intercambio	0.079 (0.032)	0.085 (0.032)	0.093 (0.032)	0.081 (0.032)	0.086 (0.041)

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelos de Corte Transversal

Años de escolaridad superior femenina	—	-0.0072 (0.0041)	—	—	—
Democracia	—	—	0.100 (0.031)	—	—
Democracia al cuadrado	—	—	-0.087 (0.026)	—	—
Corrupción	—	—	—	0.0030 (0.0076)	—
Tasa de homicidios	—	—	—	—	-0.00011 (0.00017)
Número de países/ observaciones	84/244	84/244	84/239	84/244	62/143
Valores de R-cuadrado[a]	0.59, 0.46, 0.42	0.59, 0.49, 0.43	0.66, 0.40, 0.44	0.59, 0.46, 0.42	0.63, 0.51, 0.26

a. Por períodos individuales

1: Más democracia
0:Menos democracia

1: Más favorable
0: Más corrupción

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelos de Corte Transversal

CUADRO 1 (continuación)					
Regresiones para el Crecimiento Económico					
Variable explicativa:	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Log(PIB per cápita)	-0.0316 (0.0037)	-0.0299 (0.0032)	-0.0294 (0.0032)	-0.0215 (0.0049)	-0.0328 (0.0051)
Años de escolaridad superior masculina	0.0034 (0.0020)	0.0036 (0.0019)	0.0036 (0.0019)	0.0036 (0.0020)	0.0036 (0.0024)
Log(esperanza de vida)	0.0574 (0.0168)	0.0615 (0.0148)	0.0576 (0.0141)	0.0680 (0.0153)	0.0667 (0.0267)
Log(tasa de fertilidad)	-0.0270 (0.0076)	-0.0164 (0.0058)	-0.0153 (0.0057)	-0.0138 (0.0060)	-0.0288 (0.0081)
Estado de derecho	0.0033 (0.0071)	0.0129 (0.0059)	0.0132 (0.0059)	0.0118 (0.0062)	0.0138 (0.0096)
Razón del consumo de gobierno	-0.134 (0.035)	-0.104 (0.026)	-0.106 (0.026)	-0.094 (0.026)	-0.100 (0.039)
Apertura internacional	0.00105 (0.0044)	0.0140 (0.0044)	0.0151 (0.0044)	0.0178 (0.0046)	0.0105 (0.0048)
Tasa de inflación	-0.0166 (0.0098)	-0.0159 (0.0106)	-0.0107 (0.0105)	-0.0118 (0.0103)	-0.0111 (0.0112)
Razón de inversión	0.051 (0.028)	0.062 (0.026)	0.061 (0.026)	0.062 (0.027)	0.028 (0.042)
Crecimiento de términos de intercambio	0.045 (0.038)	0.082 (0.032)	0.081 (0.032)	0.096 (0.034)	0.063 (0.050)

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Modelos de Corte Transversal

Coeficiente de Gini	0.021 (0.022)	—	—	—	—
Fracción musulmana	—	0.0042 (0.0049)	—	—	—
Log(población)	—	—	-0.0003 (0.0009)	—	—
Log(contaminación del aire)	—	—	—	-0.0053 (0.0030)	—
Log(contaminación del agua)	—	—	—	—	-0.0018 (0.0037)
Número de países/ observaciones	67/141	84/244	84/244	81/231	78/142
Valores de R-cuadrado[a]	0.62, 0.60, 0.54	0.59, 0.47, 0.42	0.60, 0.46, 0.41	0.51, 0.43 0.40	0.43, 0.42

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Lecturas

- Barro, Robert. Cantidad y Calidad del crecimiento económico. Revista Economía Chilena Vol Nº 5, Agosto 2002.
- Sala-i-Martin, Xavier. La nueva economía del crecimiento: ¿Qué hemos aprendido en 15 años? Revista Economía Chilena Vol Nº 5, Agosto 2002.

UNIVERSIDAD SAN IGNACIO DE LOYOLA

Macroeconomía Dinámica

Ronald Cuela