



Generaciones Traslapadas

Ronald Cuela

Contenido

- 1 Un Modelo Intertemporal
- 2 El Modelo Básico de GT
- 3 SSS Totalmente Financiado
- 4 SSS No Financiado



Un Modelo Intertemporal

- Un agente vive 2 períodos
- No existe incertidumbre
- No existe restricción de ahorro o préstamo
- Separabilidad de la función de utilidad
- Descuento de la utilidad futura



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Un Modelo Intertemporal

Problema:

$$\underset{c_1, c_2}{\text{Max}}: u(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

$$\text{s.a.}: c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w$$

Lagrangiano:

$$L = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda \left(w - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right)$$

Solución:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Un Modelo Intertemporal

Una visión distinta del problema:

$$\text{Max}_{c_1, c_2} : u(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

$$\text{s.a.: } c_1 = w - s$$

$$c_2 = s(1+r)$$

Problema:

$$\text{Max}_s : u[c_1(s), c_2(s)] = u[w - s] + \beta u[s(1+r)]$$

Solución:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$$

$$u'[w - s] = \beta(1+r)u'[s(1+r)]$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Contenido

- 1 Un Modelo Intertemporal
- 2 El Modelo Básico de GT
- 3 SSS Totalmente Financiado
- 4 SSS No Financiado



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

- Un agente vive 2 períodos
- No existe incertidumbre
- No existe restricción de ahorro o préstamo
- Separabilidad de la función de utilidad
- Descuento de la utilidad futura
- En un período viven 2 generaciones, jóvenes y viejos.
- Sólo los jóvenes reciben un único salario.
- Tasa de crecimiento de la población constante



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

Nomenclatura:

$$C_t^t = C_{\text{tiempo}}^{\text{generación}}$$

Consumo de la generación t cuando son viejos:

$$C_{t+1}^t$$

Salario de los jóvenes de la generación t

$$S_t$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

1. ¿Cómo se determinan los niveles de consumo óptimos?

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: c_t^t = w_t - s_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t(1 + r_{t+1})$$

Problema:

$$\underset{s}{Max}: u[c_t^t(s_t), c_{t+1}^t(s_t)] = u[w_t - s_t] + \beta u[s_t(1 + r_{t+1})]$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

1. ¿Cómo se determinan los niveles de consumo óptimos?

Solución:

$$u'[w_t - s_t] = \beta(1 + r_{t+1})u'[s_t(1 + r_{t+1})]$$

Ahorro Óptimo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

Se pueden determinar a partir del ahorro óptimo



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

2. ¿Cómo se determina el ahorro óptimo?

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

Recordando la solución:

$$u'[w_t - s_t] = \beta(1 + r_{t+1})u'[s_t(1 + r_{t+1})]$$

Derivando respecto al salario:

$$u''[w_t - s_t] \left(1 - \frac{\partial s_t}{\partial w_t}\right) = \beta(1 + r_{t+1})u''[s_t(1 + r_{t+1})](1 + r_{t+1}) \left(\frac{\partial s_t}{\partial w_t}\right)$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial w_t} = \frac{u''[w_t - s_t]}{u''[w_t - s_t] + \beta(1 + r_{t+1})^2 u''[s_t(1 + r_{t+1})]}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

2. ¿Cómo se determina el ahorro óptimo?

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

Recordando la solución:

$$u'[w_t - s_t] = \beta(1 + r_{t+1})u'[s_t(1 + r_{t+1})]$$

Derivando respecto a la tasa de interés:

...

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} = \frac{-\beta u'[w_t - s_t] - \beta(1 + r_{t+1})s_t u''[(1 + r_{t+1})s_t]}{u''[w_t - s_t] + \beta(1 + r_{t+1})^2 u''[(1 + r_{t+1})s_t]}$$

Se pueden determinar a partir del salario y tasa de interés



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

3. ¿Cómo se determinan el salario y la tasa de interés?

En el mercado de factores

- Las empresas utilizan 2 factores: Capital y Trabajo.

$$Y_t = F(K_t, N_t)$$

- Las empresas pagan a los factores de acuerdo a su productividad marginal.

$$B_t = F(K_t, N_t) - r_t K_t - w_t N_t$$

$$r_t = F_{K_t}$$

$$w_t = F_{N_t}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

3. ¿Cómo se determinan el salario y la tasa de interés?

- La función de producción es homogénea de grado 1.

$$\frac{Y_t}{N_t} = \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) = f(k_t)$$

$$r_t = F_{K_t} = f'(k_t)$$

$$w_t = F_{N_t} = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Se pueden determinar a partir del capital per cápita



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

4. ¿Cómo se determinan el capital per cápita?

En Equilibrio:

- La empresas requieren para la producción en $t+1$: K_{t+1}
- Los jóvenes de la generación t ahorraron para $t+1$: $s_t N_t$

$$K_{t+1} = N_t s [w_t, r_{t+1}]$$

$$k_{t+1} = \frac{s_t [f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})]}{1+n}$$

Se pueden determinar a partir de este equilibrio



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

5. Características del estado estacionario

- Múltiples equilibrios:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{-k_t f''(k_t) s_w}{1+n - f''(k_{t+1}) s_r}$$

- Condición de estabilidad:

$$\left\| \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} \right\| < 1$$

- Condición de no oscilación:

$$0 < \left\| \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} \right\| < 1$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Contenido

- 1 Un Modelo Intertemporal
- 2 El Modelo Básico de GT
- 3 SSS Totalmente Financiado
- 4 SSS No Financiado



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS Totalmente Financiado

Nomenclatura

- Contribución de los jóvenes:

$$d_t$$

- Pensión de los viejos:

$$b_t$$

Un agente de la generación t recibe de viejo lo que aportó de joven más el interés de mercado.



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS Totalmente Financiado

Niveles óptimos sin SSS Totalmente Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{\text{Max}}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$\text{s.a.: } c_t^t + s_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t(1 + r_{t+1})$$

Ahorro Óptimo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS Totalmente Financiado

Niveles óptimos con SSS Totalmente Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{\text{Max}}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$\text{s.a.: } c_t^t + s_t^{(1)} + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t^{(1)}(1 + r_{t+1}) + b_t$$

En este sistema de seguridad social: $b_t = (1 + r_{t+1})d_t$

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{\text{Max}}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$\text{s.a.: } c_t^t + (s_t^{(1)} + d_t) = w_t$$

$$c_{t+1}^t = (s_t^{(1)} + d_t)(1 + r_{t+1})$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS Totalmente Financiado

Conclusiones

Si el ahorro en condiciones de ausencia del SSS es mayor o igual al aporte bajo el SSS TF.

$$s_t \geq d_t$$

La solución no se modifica, el ahorro total se divide en una parte obligatoria y otra voluntaria.

$$s_t = s_t^{(1)} + d_t$$

La acumulación de capital no es afectada.



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS Totalmente Financiado

Conclusiones

Si el ahorro en condiciones de ausencia del SSS es menor al aporte bajo el SSS TF.

$$s_t < d_t$$

La solución se modifica, se esperaría que el ahorro total sería igual al aporte.

$$s_t = d_t \quad s_t^{(1)} = 0$$

La acumulación de capital es afectada.



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Contenido

- 1 Un Modelo Intertemporal
- 2 El Modelo Básico de GT
- 3 SSS Totalmente Financiado
- 4 SSS No Financiado



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS No Financiado

Nomenclatura

- Contribución de los jóvenes:

$$d_t$$

- Pensión de los viejos:

$$b_t$$

Un agente de la generación t recibe de viejo la parte proporcional del aporte de todos los jóvenes de la generación $t+1$.



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS No Financiado

Niveles óptimos sin SSS No Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{\text{Max}}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$\text{s.a.: } c_t^t + s_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t(1 + r_{t+1})$$

Ahorro Óptimo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS No Financiado

Niveles óptimos con SSS No Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{\text{Max}}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$\text{s.a.: } c_t^t + s_t^{(2)} + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t^{(2)}(1 + r_{t+1}) + b_t$$

En este sistema de seguridad social: $b_t = (1 + n)d_t$

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{\text{Max}}: u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$\text{s.a.: } c_t^t + s_t^{(2)} + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t^{(2)}(1 + r_{t+1}) + d_t(1 + n)$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

SSS No Financiado

Conclusiones

El ahorro se distorsiona.

La acumulación disminuye, porque una parte del ahorro de los jóvenes se va a sostener el consumo de los viejos y no a la producción.

$$s_t = s_t^{(2)} + d_t$$

La acumulación de capital es afectada.



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela



UNIVERSIDAD
SAN IGNACIO
DE LOYOLA



Macroeconomía Dinámica

Ronald Cuela