Universidad San Ignacio de Loyola

Expectativas Racionales

Ronald Cuela

Contenido

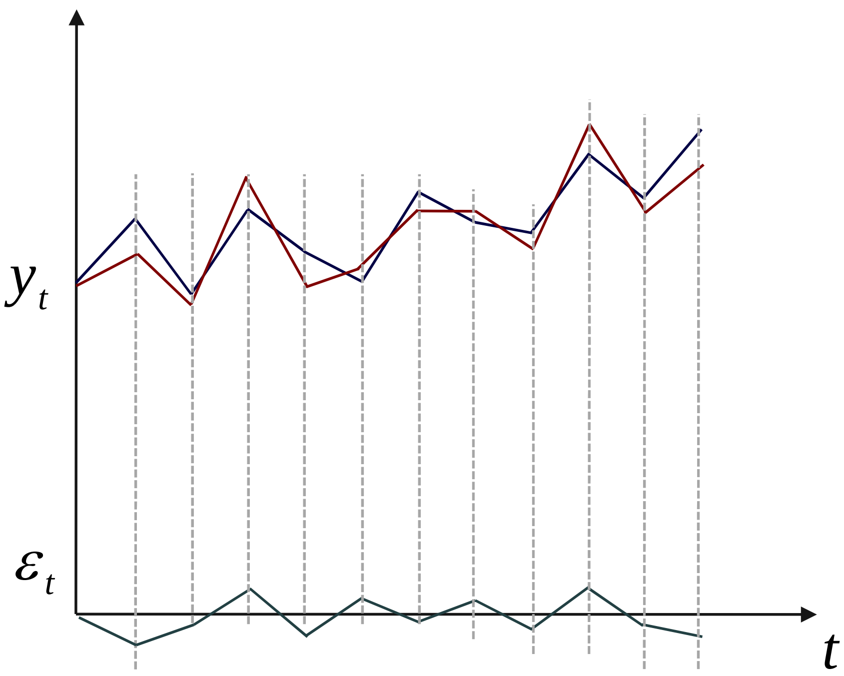
Modelación de las ER

- Las expectativas racionales fueron planteadas por Muth (1960)
- Incorporadas en modelos económicos por Lucas (1972)
- Popularizadas por Sargent y Wallace.

Modelación de las ER

Proceso de formación de ER

- Las variables económicas siguen cierto patrón de conducta.
- Los errores revelan discrepancias entre el patrón de conducta de la variable y el esperado por el agente.
- El agente revisa sus errores para no caer de nuevo (en los mismos errores) en el futuro.



No se cometen errores sistemáticos

Nomenclaturas

- Tres formas indistintas:

$$E\left(x_{t+1} / \Omega_t\right)$$

$$E_t x_{t+1}$$

$$_t x_{t+1}$$

Propiedades del estimador de ER

- Predictor insesgado

$$E_t\left[x_{t+1} - E_t(x_{t+1})\right] = 0$$

- Predictor eficiente

$$y_{t+1} = a + bx_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \qquad Var(y_t) = b^2 Var(x_t) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$y_{t+1} = a + bx_{t+1} + cz_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \qquad Var(y_t) = b^2 Var(x_t) + c^2 Var(z_t) + \sigma_\varepsilon^2$$

Expectativas iteradas

- ¿Cuál es mi pronóstico hoy sobre mi pronóstico de mañana para el tipo de cambio de pasado mañana?

$$E_t E_{t+1} x_{t+2} = ?$$

- ¿Cuál sera mi pronóstico de mañana sobre mi pronóstico de hoy para el tipo de cambio de pasado mañana?

$$E_{t+1} E_t x_{t+2} = ?$$

Sistematización de los errores de Muth (1961)

- Los precios se determinan en el mercado de bienes:
  - Demanda $$y_t^d = a_0 - a_1 P_t$$
  - Oferta $$y_t^s = b_0 + b_1 P_t^e + u_t$$
  - Equilibrio $$P_t = \frac{a_0 - b_0}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} P_t^e - \frac{1}{a_1} u_t$$

Sistematización de los errores de Muth (1961)

- Si usamos expectativas estáticas: $P_t^e = P_{t-1}$

- Precios $$P_t = \frac{a_0 - b_0}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} P_{t-1} - \frac{1}{a_1} u_t$$

- Error $$\varepsilon_t = P_t - P_t^e = \underbrace{\frac{a_0 - b_0}{a_1} - \left(\frac{b_1}{a_1} + 1\right) P_{t-1}}_{\substack{error\ sistemático\ o\ predecible \\ (evitable)}} - \underbrace{\frac{1}{a_1} u_t}_{\substack{error\ aleatorio \\ (inevitable)}}$$

Sistematización de los errores de Muth (1961)

- Si usamos expectativas adaptativas: $$P_t^e = (1-\lambda)P_{t-1} + \lambda P_{t-1}^e$$

- Precios $$P_t = \frac{a_0 - b_0}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i P_{t-i-1} - \frac{1}{a_1}u_t$$

- Error $$\varepsilon_t = P_t - P_t^e = \underbrace{\frac{a_0 - b_0}{a_1} - \left(\frac{b_1}{a_1} + 1\right)(1-\lambda)\sum_{0}^{\infty}\lambda^i P_{t-i-1}}_{\substack{\text{error sistemático o predecible} \\ (\text{evitable})}} - \underbrace{\frac{1}{a_1}u_t}_{\substack{\text{error aleatorio} \\ (\text{inevitable})}}$$

Sistematización de los errores de Muth (1961)

- Con expectativas racionales: $$P_t^e = E\left[P_t / \Omega_{t-1}\right] = E_{t-1}P_t$$

- Precios $$P_t = \frac{a_0 - b_0}{a_1 + b_1} - \frac{1}{a_1}u_t$$

- Error $$\varepsilon_t = P_t - P_t^e = \underbrace{-\frac{1}{a_1}u_t}_{\substack{error\ aleatorio \\ (inevitable)}}$$

No se cometen errores sistemáticos

Resolución de modelos con ER

- Método de proyecciones iteradas:

- Métodos de coeficientes indeterminados:

$$y_t = \alpha_0 - \alpha_1 E_t y_{t+1} + u_t \qquad\qquad u_t \sim RB$$

Ejercicios

1. $y_t = \alpha_0 - \alpha_1 E_t y_{t+1} + u_t \qquad u_t \sim AR(1) \;\Rightarrow\; u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

2. $y_t = \alpha_0 - \alpha_1 E_{t-1} y_t + u_t \qquad u_t \sim AR(1) \;\Rightarrow\; u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

3. $y_t^d = a_0 - a_1 P_t + v_t \qquad u_t, v_t \sim RB$

   $y_t^s = b_0 + b_1 E_{t-1} y_t + u_t \qquad \mathrm{cov}(u_t, v_t) = 0$

4. DA: $y_t = \beta_0 - \beta_1 (m_t - p_t) + v_t \qquad v_t \sim AR(1) \;\Rightarrow\; v_t = \theta v_{t-1} + \varepsilon_t$

   OA: $y_t = \bar{y} + \alpha (p_t - E_{t-1} p_t)$

   RP : $m_t = u_0 + u_1 v_{t-1} + e_t \qquad \mathrm{cov}(e_t, \varepsilon_t) = 0$

¿Y las ER en tiempo continuo?

$$E_t x_{t+h}$$

$$\lim_{h \to 0} E_t x_{t+h} = E_t x_t = x_t$$

Pronóstico perfecto de muy corto plazo

Contenido

Modelo de Cagan con ER

El modelo en tiempo discreto

- Recordando la versión estudiada $\frac{M_t}{P_t} = f(\pi_t^e)$
- Linealizado $\frac{M_t}{P_t} = c - b\left[\frac{P_{t+1}^e - P_t}{P_t}\right]$

$$P_t = \frac{1}{b+c} M_t + \frac{b}{b+c} P_{t+1}^e$$

- Expectativas adaptativas $P_t^e = (1-\lambda)P_{t-1} + \lambda P_{t-1}^e$

$$P_{t+1}^e = (1-\lambda)P_t + \lambda P_t^e$$

- Resultado $P_t = \frac{1}{c-b\lambda} M_t + \frac{b\lambda(1-\lambda)}{c-b\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i P_{t-i-1}$

Backward looking

Modelo de Cagan con ER

El modelo en tiempo discreto

- Recordando la versión estudiada $\frac{M_t}{P_t} = f(\pi_t^e)$
- Linealizado $\frac{M_t}{P_t} = c - b\left[\frac{P_{t+1}^e - P_t}{P_t}\right]$
- Expectativas racionales $P_t = \frac{1}{b+c} M_t + \frac{b}{b+c} E_t P_{t+1}$
- Resultado $P_t = \frac{1}{b+c} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{b}{b+c}\right)^i E_t M_{t+i}$

Forward looking

Modelo de Cagan con ER

El modelo en tiempo continuo

- Recordando la versión estudiada $\frac{M_t}{P_t} = f(\pi_t^e)$
- Linealizado

$$m_t - p_t = -\alpha \pi_t^e$$

- Expectativas adaptativas

$$\dot{\pi}_t^e = \gamma(\pi_t - \pi_t^e)$$

$$\dot{p}_t = \frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}(m_t - p_t)$$

- Resultado

$$p_t = (p_0 - m)e^{-\left(\frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}\right)t} + m$$

Backward looking

Modelo de Cagan con ER

El modelo en tiempo continuo

- Recordando la versión estudiada $\frac{M_t}{P_t} = f(\pi_t^e)$
- Linealizado $m_t - p_t = -\alpha \pi_t^e$
- Expectativas racionales

$$\dot{\pi}_t^e = \gamma(\pi_t - \pi_t^e)$$

$$\dot{p}_t = \frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}(m_t - p_t)$$

- Resultado

$$p_t = \frac{1}{\alpha}\int_t^{\infty} e^{\frac{1}{\alpha}(t-s)} m_s \partial s$$

Forward looking

Modelo de Cagan con ER

Incremento no anticipado de M

- En tiempo discreto

$$P_t = \frac{1}{b+c}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{b}{b+c}\right)^i E_t M_{t+i}$$

$$P_t = \frac{1}{c} M_0$$

$$M_0 \rightarrow M_1$$

$$P_t = \frac{1}{c} M_1$$

- En tiempo continuo

$$p_t = \frac{1}{\alpha}\int_t^{\infty} e^{\frac{1}{\alpha}(t-s)} m_s \partial s$$

$$m_0 \rightarrow m_1$$

$$p_t = m_0$$

$$p_t = m_1$$

Modelo de Cagan con ER

Incremento anticipado de M

- En tiempo discreto $$P_t = \frac{1}{b+c}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{b}{b+c}\right)^i E_t M_{t+i}$$

- Se anticipa el aumento de M para T

$$P_t = \frac{1}{b+c}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{b}{b+c}\right)^i E_t M_{t+i} = \frac{1}{b+c}\sum_{i=0}^{T-t-1}\left(\frac{b}{b+c}\right)^i M_0 + \frac{1}{b+c}\sum_{i=T-t}^{\infty}\left(\frac{b}{b+c}\right)^i M_1$$

- Si $$\gamma = \frac{b}{b+c} < 1$$

$$\boxed{P_t = \frac{1}{c}\left[\left(1-\gamma^{T-t}\right) M_0 + \left(\gamma^{T-t}\right) M_1\right]}$$

Incremento anticipado de M

- En tiempo continuo

$$p_t = \frac{1}{\alpha}\int_t^{\infty} e^{\frac{1}{\alpha}(t-s)} m_s \partial s$$

- Se anticipa el aumento de M para T

$$p_t = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}t} \int_t^{T} e^{-\frac{1}{\alpha}s} m_0 \partial s + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}t} \int_T^{\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}s} m_1 \partial s$$

- Solución

$$p_t = \left[1 - e^{-\frac{1}{\alpha}(T-t)}\right] m_0 + \left[e^{-\frac{1}{\alpha}(T-t)}\right] m_1$$

Ejercicio

- En tiempo discreto y continuo
  - ¿Qué ocurre con los precios si el Banco Central cambia de una política de cantidad de dinero constante a una política de crecimiento constante del dinero?

$$M_t = (1+u)^t M_0$$

$$m_t = m_0 + ut$$

Contenido

Rational expectations and the theory of economic policy, 1976

- Sargent y Wallace (1996) popularizan los resultados de Lucas sobre la neutralidad del dinero
- Desarrollan un modelo para demostrar que las ventajas de la discrecionalidad sobre las reglas fijas desaparecen cuando el público anticipa perfectamente las políticas del gobierno y las incorpora en regla de decisión.

El modelo consta de 3 ecuaciones

- IS $$y_t = x - br_t + cg_t + u_t$$
- LM $$m_t - p_t = ky_t - hr_t$$
- COL?? $$y_t - \bar{y} = \lambda(p_t - E_{t-1}p_t)$$

$$u_t \sim AR(1) \;\Rightarrow\; u_t = \theta\, u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Solución

- De la IS

$$r_t = \frac{1}{b}(x - y_t + cg_t + u_t)$$

- En la LM

$$m_t - p_t = ky_t - h\frac{1}{b}(x - y_t + cg_t + u_t)$$

  - Despejando

$$p_t = m_t - \left(k + \frac{h}{b}\right)y_t + \frac{h}{b}x + \frac{ch}{b}g_t + \frac{h\theta}{b}u_{t-1} + \frac{h}{b}\varepsilon_t$$

$$E_{t-1}p_t = E_{t-1}m_t - \left(k + \frac{h}{b}\right)\bar{y} + \frac{h}{b}x + \frac{ch}{b}E_{t-1}g_t + \frac{h\theta}{b}u_{t-1}$$

$$p_t - E_{t-1}p_t = m_t - E_{t-1}m_t - \left(k + \frac{h}{b}\right)(y_t - \bar{y}) + \frac{ch}{b}(g_t - E_{t-1}g_t) + \frac{h}{b}\varepsilon_t$$

- En la COL

$$y_t - \bar{y} = \frac{\lambda b}{b + bk + h}(m_t - E_{t-1}m_t) + \frac{\lambda ch}{b + bk + h}(g_t - E_{t-1}g_t) + \frac{\lambda h}{b + bk + h}\varepsilon_t$$

Conclusiones

$$Var(y_t)=\left(\frac{\lambda b}{b+bk+h}\right)^2 Var(m_t)+\left(\frac{\lambda ch}{b+bk+h}\right)^2 Var(g_t)+\left(\frac{\lambda h}{b+bk+h}\right)^2 \sigma^2_{\varepsilon_t}$$

- No existe campo de acción para la política monetaria (activista).
- Para minimizar la volatilidad del producto, el gobierno debe seguir una regla sistemática (predecible). La mejor política estabilizadora es el no uso de políticas estabilizadoras (que en realidad son perturbadoras).

Contenido

Cuestiones sobre las ER

Críticas

- Los agentes no son racionales.
- Las expectativas racionales exigen supuestos no realistas.
- Los agentes no conocen las reglas de política, ni pueden identificarlas fácilmente.
- Los agentes no tienen incentivos para buscar la información necesaria. Esta crítica obliga a ser más precisos en el tratamiento de los incentivos y costes de información.
- Las expectativas racionales sólo se pueden aplicar a variables aleatorias recurrentes. No se pueden usar las expectativas racionales a una situación de incertidumbre (a la Knight), osea donde no hay información previa.
- La hipótesis de las expectativas racionales no es verificable independientemente.

Múltiples soluciones

- El modelo de Taylor.

- IS $$y_t = -d_1\left[i_t - (E_{t-1}p_{t+1} - E_{t-1}p_t)\right] + d_2(m_t - p_t) + u_{1t}$$
- LM $$(m_t - p_t)^d = y_t - a_1 i_t + a_2(m_t - p_t)^s + u_{2t}$$
- COL $$y_t = \bar{y} + b(m_t - p_t) + u_{3t}$$
- RP $$m_t = \overline{m}$$

$$u_{1t}, u_{2t}, u_{3t} \sim RB\ \ independientes$$

Múltiples soluciones

- El modelo de Taylor.

  - Operando

$$E_{t-1}p_{t+1} = E_{t-1}p_t + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{d_1}\right)\overline{y} + \left[\frac{a_1 - 1}{a_1} - \frac{d_2}{d_1} + b\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{d_1}\right)\right]\overline{m} - \left[\frac{a_1 - 1}{a_1} - \frac{d_2}{d_1} + b\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{d_1}\right)\right]p_t - \frac{1}{d_1}u_{1t} + \frac{1}{a_1}u_{2t} + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{d_1}\right)u_{3t}$$

  - Resumiendo $$E_{t-1}p_{t+1} = E_{t-1}p_t + \phi_0 + \phi_1 p_t + u_t$$

  - Coeficientes indeterminados $$p_t = \gamma_o + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k u_{t-k}$$

  - Identificando CI $$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k+1}u_{t-k} = \phi_0 + \phi_1\gamma_o + (\lambda_o\phi_1 + 1)u_t + \sum_{k=1}^{\infty}(1+\phi_1)\lambda_k u_{t-k}$$

Múltiples soluciones

$$p_t = \gamma_o + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k u_{t-k}$$

- El modelo de Taylor.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k+1} u_{t-k} = \phi_0 + \phi_1 \gamma_o + (\lambda_o \phi_1 + 1) u_t + \sum_{k=1}^{\infty} (1+\phi_1) \lambda_k u_{t-k}$$

- De los términos independientes $\gamma_o = -\dfrac{\phi_0}{\phi_1}$
- Para u_t $\lambda_o = -\dfrac{1}{\phi_1}$
- Para $u_{t\text{-}k}$ $\lambda_{k+1} = (1+\phi_1)^k \lambda_1$

$$p_t = \frac{\phi_0}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_1} u_t + \sum_{k=1}^{\infty} (1+\phi_1)^k \lambda_1 u_{t-k}$$

Múltiples soluciones

- Modelo de Taylor

$$p_t = \frac{\phi_0}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_1} u_t + \sum_{k=1}^{\infty} (1+\phi_1)^k \lambda_1 u_{t-k}$$

- Criterios
  - Varianza finita: no ayuda si $-2 < \phi_1 < 0$
  - Varianza mínima $\lambda_1 = 0$
  - Mínimo conjunto de variables $\lambda_1 = 0$

Macroeconomía Dinámica

Ronald Cuela