



Repaso Matemático I

Ronald Cuela

Contenido

- 1 Estado estacionario
- 2 Ecuaciones Diferenciales
- 3 Ecuaciones en Diferencias
- 4 Diagramas fase



Estado Estacionario

❖ Estado Estacionario

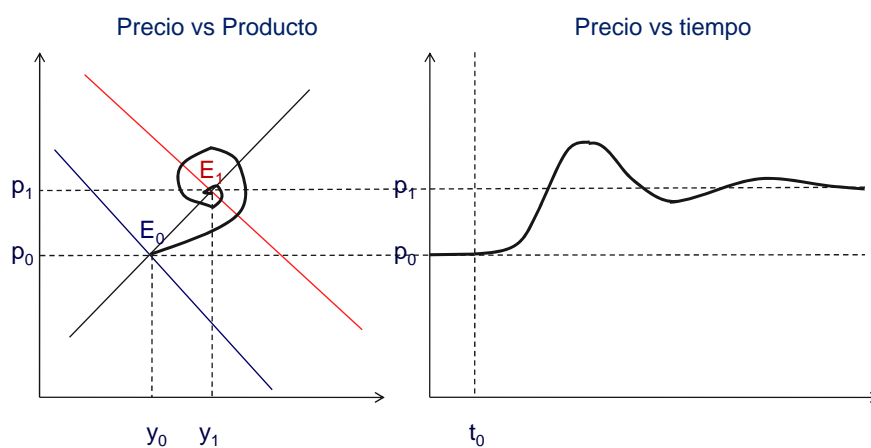
- Un valor donde la variable no cambia.
- Un equilibrio en el tiempo.
- Un sistema estable tiende a un estado estacionario.
- En economía, se espera que todas las variables tiendan a un estado estacionario.



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Estado Estacionario

Volvemos al ejemplo inicial



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Estado Estacionario

❖ Condiciones del EE

- En tiempo continuo $\dot{y}_t = \frac{dy_t}{dt} = 0$
- En tiempo discreto $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = 0$
- En un sistema de EDO $\dot{X}_t = \bar{0}$
- En un sistema de EED $X_{t+1} - X_t = \bar{0}$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Contenido

- 1 Estado estacionario
- 2 **Ecuaciones Diferenciales**
- 3 Ecuaciones en Diferencias
- 4 Diagramas fase



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de primer orden

Forma General: $\dot{y}_t = ay_t + b$

Estado Estacionario: $y^* = -\frac{b}{a}$

Solución: $y_t = y^* + (y_0 - y^*)e^{at}$

Condición de estabilidad: $a < 0$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de primer orden

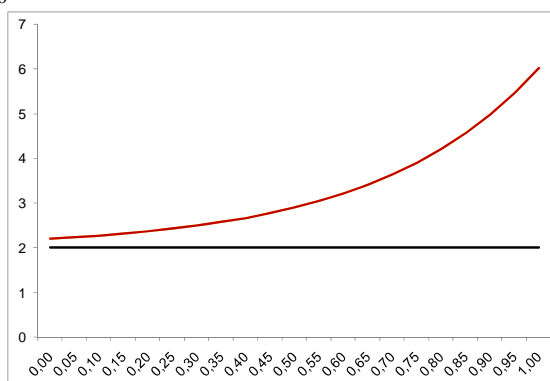
Ejemplo: $\dot{y}_t = 3y_t - 6$

Estado Estacionario: $y^* = 2$

Solución: $y_t = 2 + (y_0 - 2)e^{3t}$

Condición de estabilidad: *No cumple*

$y_0 = 2.2$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de primer orden

Ejemplo: $\dot{y}_t = -2y_t + 8$

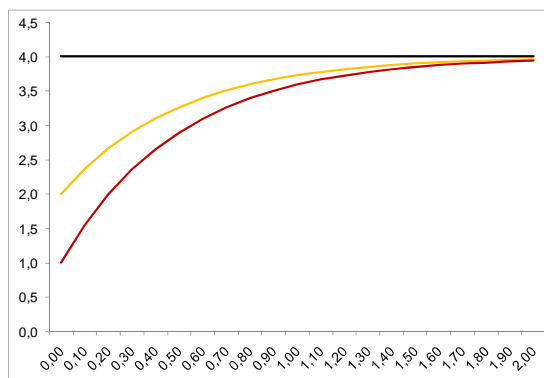
Estado Estacionario: $y^* = 4$

Solución: $y_t = 4 + (y_0 - 4)e^{-2t}$

Condición de estabilidad: *Si cumple*

$y_0 = 2.2$

$y_0 = 1.0$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de primer orden

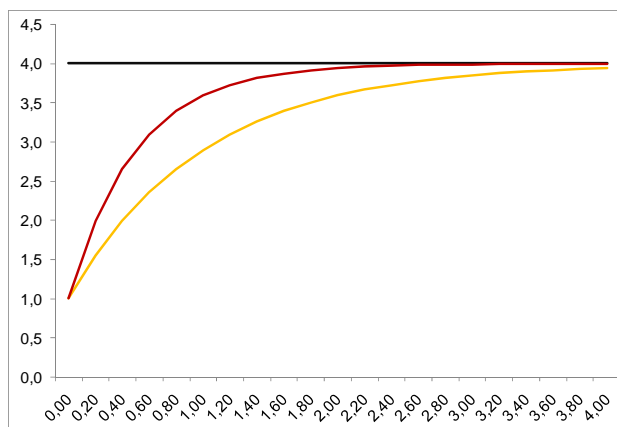
- ¿Quién va más rápido?

$\dot{y}_t = -2y_t + 8$

$y_t = 4 + (y_0 - 4)e^{-2t}$

$\dot{y}_t = -y_t + 4$

$y_t = 4 + (y_0 - 4)e^{-t}$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de primer orden

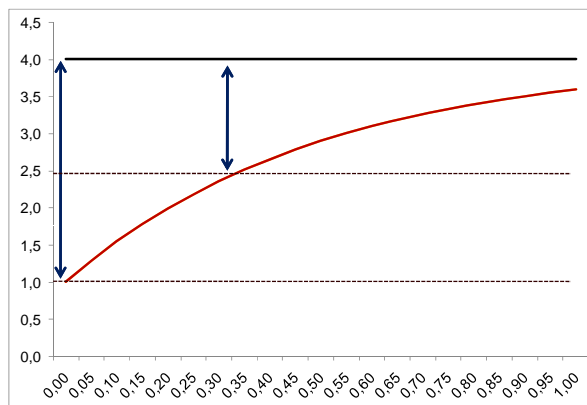
¿Cuánto se demora una economía en recorrer la mitad de la brecha a su estado estacionario?

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)e^{at}$$

$$t = \frac{1}{a} \operatorname{Ln} \left(\frac{y_t - y^*}{y_0 - y^*} \right)$$

$$t = \frac{1}{a} \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$t = \frac{0.693}{-a}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de primer orden no lineales

Forma General: $\dot{y}_t = f(y_t)$

Estado Estacionario: $f(y^*) = 0$

Forma Linealizada: $\dot{y}_t \approx (y_t - y^*)f'(y^*)$

Solución: $y_t \approx y^* + (y_0 - y^*)e^{f'(y^*)t}$

Condición de estabilidad: $f'(y^*) < 0$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ EDO de segundo orden

Forma General: $\ddot{y}_t + b\dot{y}_t + cy_t = d$

Estado Estacionario: $y^* = \frac{d}{c}$

Raíces:

Soluciones:

Condición de estabilidad:

$(r_1 = r_2) = r$

$y_t = y^* + Ae^{rt} + Bte^{rt}$

$r < 0$

$(r_1 \neq r_2) \in R$

$y_t = y^* + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

$r_1, r_2 < 0$

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$y_t = y^* + e^{\alpha t} [A \cos \beta t + B \sin \beta t]$

$\alpha < 0$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

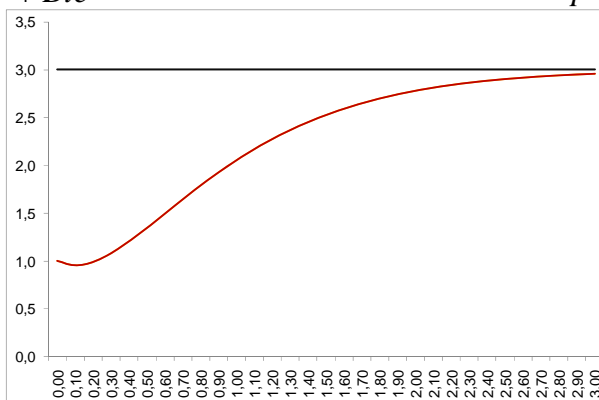
❖ EDO de segundo orden

Ejemplo: $\ddot{y}_t + 4\dot{y}_t + 4y_t = 12$ EE: $y^* = 3$ Raíces: $r_1 = r_2 = -2$

Solución: $y_t = 3 + Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$ Condición de estabilidad: *Si cumple*

$y_0 = 1$

$\dot{y}_0 = -1$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

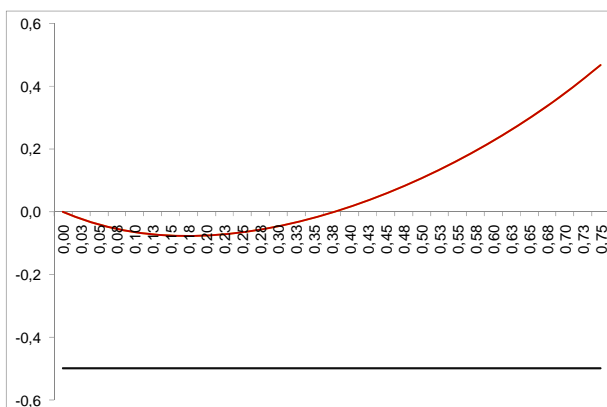
❖ EDO de segundo orden

Ejemplo: $\ddot{y}_t + 3\dot{y}_t - 10y_t = 5$ EE: $y^* = -0.5$ Raíces: $(r_1, r_2) = (-5, 2)$

Solución: $y_t = -0.5 + Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$ Condición de estabilidad: *No cumple*

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}_0 = -1$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

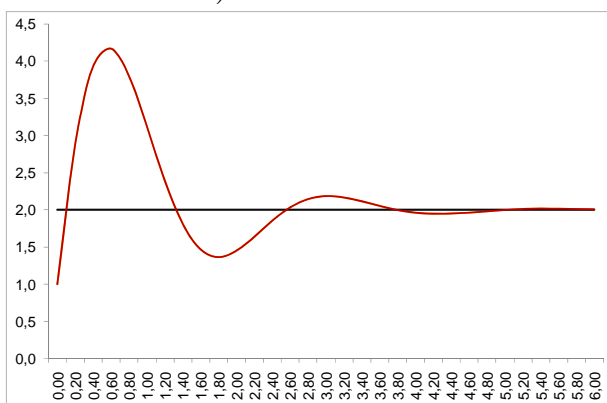
❖ EDO de segundo orden

Ejemplo: $\ddot{y}_t + 2\dot{y}_t + 7.5y_t = 15$ EE: $y^* = 2$ Raíces: $r_{1,2} = -1 \pm 2.5i$

Solución: $y_t = 3 + e^{-t}(A\cos 2.5t + B\sin 2.5t)$ Condición de estabilidad: *Si cumple*

$$y_0 = 1$$

$$\dot{y}_0 = 5$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ Sistemas de EDO

Forma General:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \dot{X}_t = AX_t + B$$

Estado Estacionario:
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad X^* = A^{-1}B$$

Raíces:	Soluciones:	Condición de estabilidad:
$(r_1 = r_2) = r$	$X_t = X^* + (C_1 + C_2 t)P_1 e^{rt} + C_2 P_2 e^{rt}$	$r < 0$
$(r_1 \neq r_2) \in \mathbb{R}$	$X_t = X^* + C_1 P_1 e^{r_1 t} + C_2 P_2 e^{r_2 t}$	$r_1, r_2 < 0$
$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$X_t = X^* + e^{\alpha t} [(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t)P_1 + (C_1 \cos \beta t - C_2 \operatorname{sen} \beta t)P_2]$	$\alpha < 0$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ Sistemas de EDO

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Estado Estacionario:
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Raíces: $(r_1, r_2) = (-5, 2)$

Matriz Diagonalizante:
$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:
$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Condición de estabilidad: *No cumple*



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ Sistemas de EDO no lineales

Forma General:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_t, y_t) \\ g(x_t, y_t) \end{bmatrix}$$
 Estado Estacionario:
$$\begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aproximación de Taylor:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{bmatrix}$$

Raíces:

Soluciones:

Condición de estabilidad:

$$(r_1 = r_2) = r$$

$$X_t = X^* + (C_1 + C_2 t)P_1 e^{rt} + C_2 P_2 e^{rt}$$

$$r < 0$$

$$(r_1 \neq r_2) \in \mathbb{R}$$

$$X_t = X^* + C_1 P_1 e^{r_1 t} + C_2 P_2 e^{r_2 t}$$

$$r_1, r_2 < 0$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$X_t = X^* + e^{\alpha t} [(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)P_1 + (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t)P_2]$$

$$\alpha < 0$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones Diferenciales

❖ Sistemas de EDO

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$
 Estado Estacionario:
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Raíces: $(r_1, r_2) = (-5, 2)$

Matriz Diagonalizante:
$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:
$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Condición de estabilidad: *No cumple*



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Contenido

- 1 Estado estacionario
- 2 Ecuaciones Diferenciales
- 3 Ecuaciones en Diferencias**
- 4 Diagramas fase



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ EED de primer orden

Forma General: $y_{t+1} = by_t + c$

Estado Estacionario: $y^* = \frac{c}{1-b}$

Solución: $y_t = y^* + (y_0 - y^*)b^t$

Condición de estabilidad: $|a| < 1$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

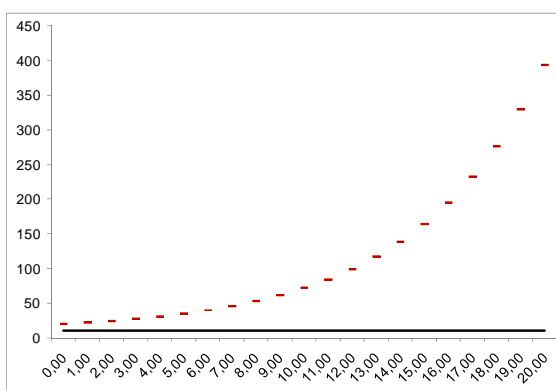
❖ EED de primer orden

Ejemplo: $y_{t+1} = 1.2y_t - 2$

Estado Estacionario: $y^* = 10$

Solución: $y_t = 10 + (y_0 - 10)1.2^t$ Condición de estabilidad: *No cumple*

$y_0 = 20$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

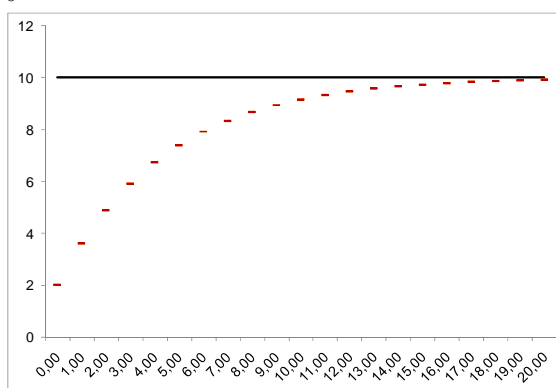
❖ EED de primer orden

Ejemplo: $y_{t+1} = 0.8y_t + 2$

Estado Estacionario: $y^* = 10$

Solución: $y_t = 10 + (y_0 - 10)0.8^t$ Condición de estabilidad: *Si cumple*

$y_0 = 2$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

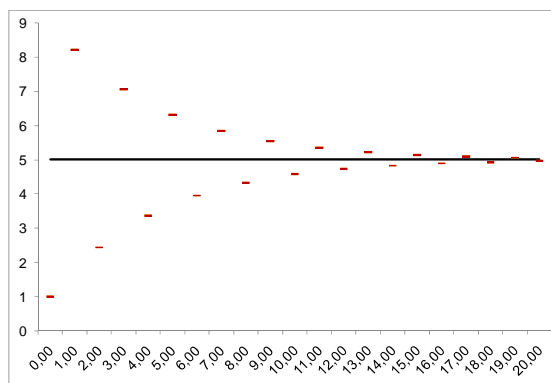
❖ EED de primer orden

Ejemplo: $y_{t+1} = -0.8y_t + 9$

Estado Estacionario: $y^* = 5$

Solución: $y_t = 5 + (y_0 - 5)(-0.8)^t$ Condición de estabilidad: *Si cumple*

$y_0 = 1$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ EED de primer orden

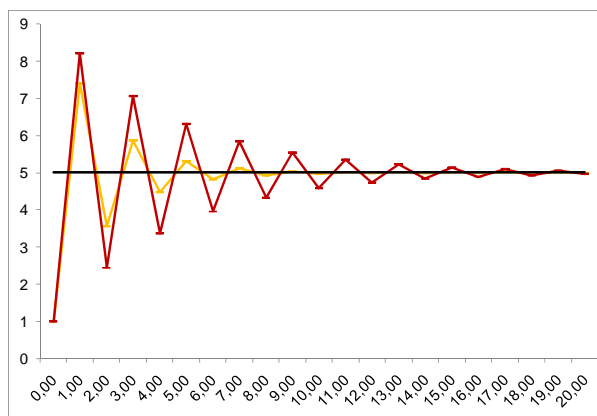
- ¿Quién va más rápido?

$y_{t+1} = -0.8y_t + 9$

$y_t = 5 + (y_0 - 5)(-0.8)^t$

$y_{t+1} = -0.6y_t + 8$

$y_t = 5 + (y_0 - 5)(-0.6)^t$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ EED de primer orden

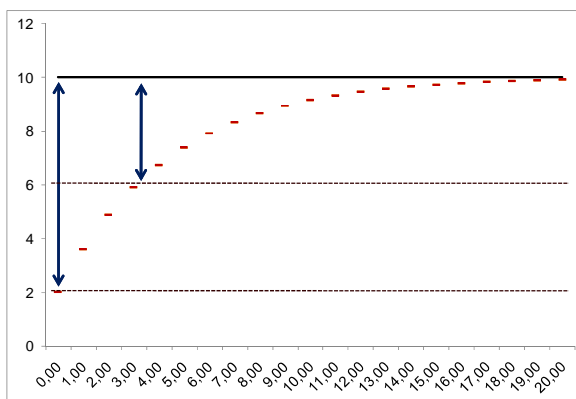
¿Cuánto se demora una economía en superar la mitad de la brecha a su estado estacionario?

$$y_t - y^* \leq (y_0 - y^*)a^t$$

$$t \geq \text{Log}_a \left(\frac{y_t - y^*}{y_0 - y^*} \right)$$

$$t \geq \frac{\text{Ln}(\frac{1}{2})}{\text{Ln } a}$$

$$t \geq \frac{0.693}{-\text{Ln } a}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ EED de primer orden no lineales

Forma General: $y_{t+1} = f(y_t)$

Estado Estacionario: $y^* = f(y^*)$

Forma Linealizada: $y_{t+1} - y^* \approx (y_t - y^*)f'(y^*)$

Solución: $y_t \approx y^* + (y_0 - y^*)[f'(y^*)]^t$

Condición de estabilidad: $|f'(y^*)| < 1$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ EED de segundo orden

Forma General: $ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = d$

Estado Estacionario: $y^* = \frac{d}{a+b+c}$

Raíces:

Soluciones:

Condición de estabilidad:

$$(r_1 = r_2) = r$$

$$y_t = y^* + Ar^t + Btr^t$$

$$|r| < 1$$

$$(r_1 \neq r_2) \in R$$

$$y_t = y^* + Ar_1^t + Br_2^t$$

$$|r_1|, |r_2| < 1$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$y_t = y^* + r^t [A \cos \theta t + B \sin \theta t]$$

$$r = \|\alpha \pm \beta i\| < 1$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ EDO de segundo orden

Ejemplo: $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 9$

EE: $y^* = 9$

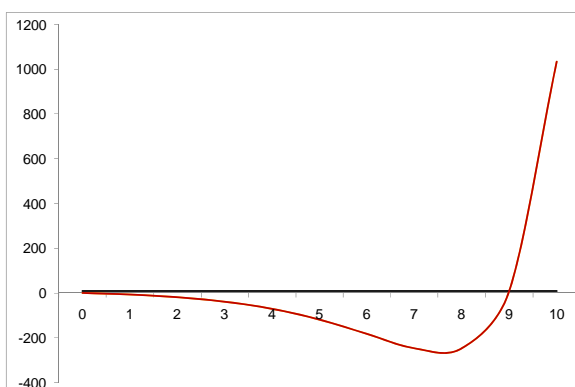
Raíces: $r_1 = r_2 = 2$

Solución: $y_t = 9 + A2^t + Bt2^t$

Condición de estabilidad: *No cumple*

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = -7$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

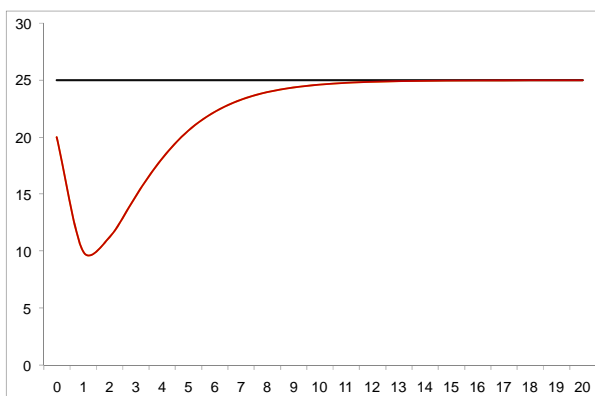
❖ EDO de segundo orden

Ejemplo: $y_{t+2} - y_{t+1} + 0.24y_t = 6$ EE: $y^* = 25$ Raíces: $r_{1,2} = (0.6, 0.4)$

Solución: $y_t = 25 + A(0.6)^t + B(0.4)^t$ Condición de estabilidad: *Si cumple*

$$y_0 = 20$$

$$y_1 = 10$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

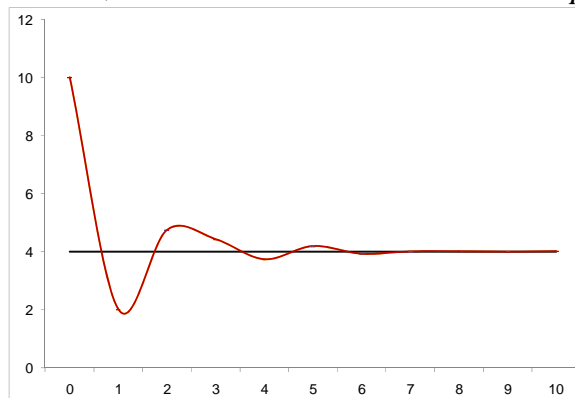
❖ EDO de segundo orden

Ejemplo: $y_{t+2} + 0.8y_{t+1} + 0.25y_t = 8.2$ EE: $y^* = 4$ Raíces: $r_{1,2} = -0.4 \pm 0.3i$

Solución: $y_t = 4 + r^t (A \cos \theta t + B \sin \theta t)$ Condición de estabilidad: *Si cumple*

$$y_0 = 10$$

$$y_1 = 2$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ Sistemas de EED

Forma General:
$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad X_{t+1} = AX_t + B$$

Estado Estacionario:
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad X^* = (I - A)^{-1} B$$

Raíces:

Soluciones:

Condición de estabilidad:

$$(r_1 = r_2) = r$$

$$X_t = X^* + (X_0 - X^*)A^t$$

$$|r| < 1$$

$$(r_1 \neq r_2) \in \mathbb{R}$$

$$X_t = X^* + (X_0 - X^*)A^t$$

$$|r_1|, |r_2| < 1$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$X_t = X^* + (X_0 - X^*)A^t$$

$$r = |\alpha \pm \beta i| < 1$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Ecuaciones en Diferencias

❖ Sistemas de EED

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{Estado Estacionario: } \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Raíces: $(r_1, r_2) = (6, -1)$

Matriz Diagonalizante: $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Solución:
$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_0 - x^* \\ y_0 - y^* \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Condición de estabilidad: *No cumple*



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Contenido

- 1 Estado estacionario
- 2 Ecuaciones Diferenciales
- 3 Ecuaciones en Diferencias
- 4 Diagramas fase



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-Método 1

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Estado Estacionario:
$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Raíces: $(r_1, r_2) = (-5, 2)$

Matriz Diagonalizante:
$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:
$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

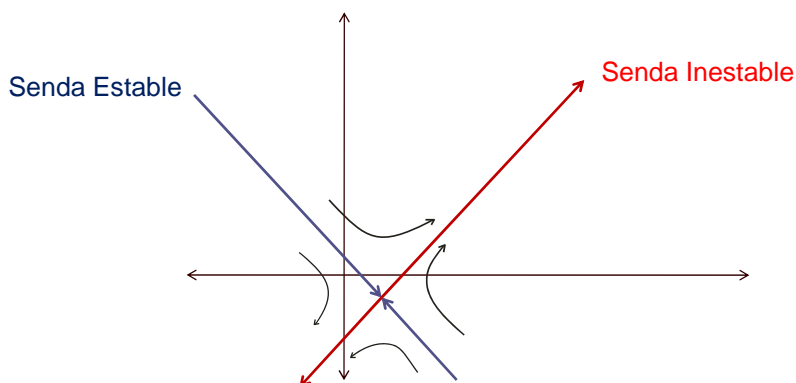
Condición de estabilidad: *No cumple*



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-Método 1

Ejemplo: $\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$

Estado Estacionario: $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Raíces: $(r_1, r_2) = (4, 4)$

Matriz Diagonalizante: $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solución: $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$

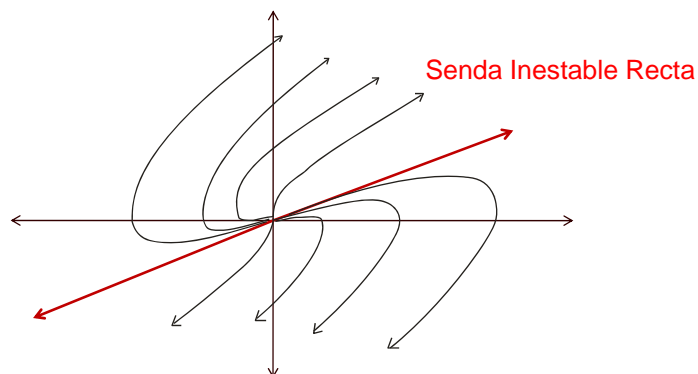
Condición de estabilidad: *No cumple*



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t)e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-Método 1

Ejemplo: $\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$

Estado Estacionario: $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Raíces: $(r_1, r_2) = 1 \pm i$

Matriz Diagonalizante: $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solución: $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + e^t (C_1 \cos t - C_2 \sin t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Condición de estabilidad: *No cumple*



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + e^t (C_1 \cos t - C_2 \sin t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

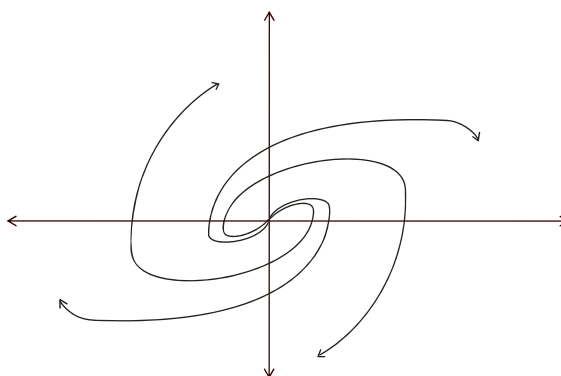
Determina la
estabilidad

$a > 0$ Inestable

Determina el
giro

$\beta > 0$ Horario

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-y el Método 2?

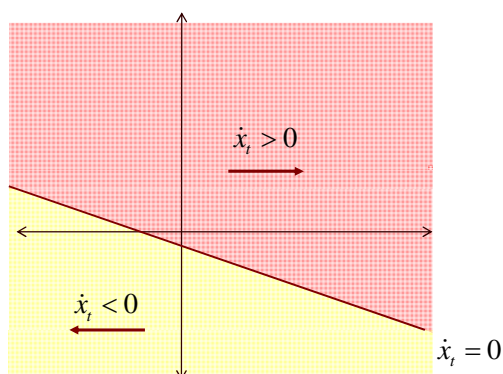
Ejemplo: $\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x}_t = x_t + 4y_t + 1$$

$$\dot{x}_t = 0 \Rightarrow y_t = -\frac{1}{4}(x_t + 1)$$

$$\dot{x}_t > 0 \Leftrightarrow y_t > -\frac{1}{4}(x_t + 1)$$

$$\dot{x}_t < 0 \Leftrightarrow y_t < -\frac{1}{4}(x_t + 1)$$



Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-y el Método 2?

Ejemplo: $\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\dot{y}_t = 3x_t + 2y_t - 2$

$\dot{y}_t = 0 \Leftrightarrow y_t = -\frac{3}{2}x_t + 1$

$\dot{y}_t > 0 \Rightarrow y_t > -\frac{3}{2}x_t + 1$

$\dot{y}_t < 0 \Rightarrow y_t < -\frac{3}{2}x_t + 1$

Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-y el Método 2?

Ejemplo: $\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\dot{x}_t = x_t + 4y_t + 1$

$\dot{y}_t = 3x_t + 2y_t - 2$

Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

Diagramas Fase

❖ EDO-y el Método 2?

Ejemplo: $\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\dot{x}_t = x_t + 4y_t + 1$

$\dot{y}_t = 3x_t + 2y_t - 2$

$\dot{x}_t = 0$

$\dot{y}_t = 0$

Macroeconomía Dinámica – Ronald Cuela

**UNIVERSIDAD
SAN IGNACIO
DE LOYOLA**

Macroeconomía Dinámica

Ronald Cuela