UPC
UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

Modelo de RCK

Ronald Cuela

Contenido

Ideas

- Incluir microfundamentos al modelo de Solow.
- Endogenizar la tasa de ahorro.
- Similares supuestos al modelo de Solow.

Planteamiento

- El Modelo de crecimiento de RCK es un modelo de crecimiento económico creado por Frank P. Ramsey (1928) y perfeccionado por David Cass (1965) y Tjalling Koopmans (1965).

Supuestos

- Economía cerrada y sin gobierno.

$$Y_t = C_t + I_t \qquad ..(1)$$

- Familias propietarias de las empresas.

$$Y_t = C_t + S_t \qquad ..(2)$$

- Dos factores de producción:
  - Capital (K)
  - Trabajo (L)

$$Y_t = F(K_t, L_t) \qquad ..(3)$$

Supuestos

- Función de producción con propiedades neoclásicas.
  - Rendimientos constantes a escala.
  - Productividad marginal positiva, pero decreciente
  - Condiciones de Inada
- Tasa de ahorro endógena

$$S_t = Y_t - C_t \qquad ..(4)$$

- Tasa de depreciación constante

$$I_t = \overset{o}{K}_t + D_t = \overset{o}{K}_t + \delta K_t$$

$$\overset{o}{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t \qquad ..(5)$$

Supuestos

- Tasa de crecimiento de la población constante

$$\overset{o}{L}_t = nL_t$$

- Usando la función de producción en la ecuación (5)

$$\overset{o}{K}_t = F\left(K_t, L_t\right) - C_t - \delta K_t \qquad ..(6)$$

Supuestos

Movimiento de capital per cápita

Teniendo en cuenta:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}$$

Reemplazando en la ecuación (6), obtenemos:

$$\overset{o}{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t \qquad \text{..(7)}$$

Problema principal

$$\text{Max} \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a}: \quad \overset{o}{k} = f(k_t) - c_t - (n+\delta) k_t$$

Solución

- Mercados competitivos.
- Dictador benevolente.

Se reduce en:

$$\overset{o}{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$$

$$\frac{\overset{o}{c}_t}{c_t} = -\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)}\left[f'(k_t) - (\rho+\delta)\right]$$

Estabilidad

Estado Estacionario

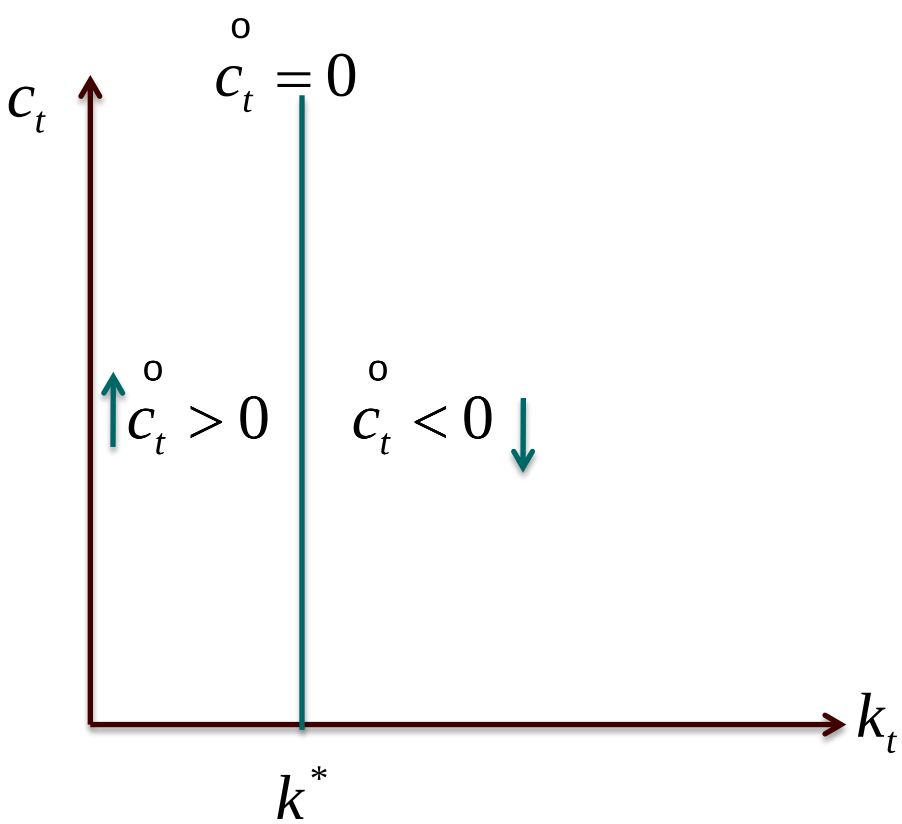
$$f\left(k^*\right)-c^*-\left(n+\delta\right)k^*=0$$

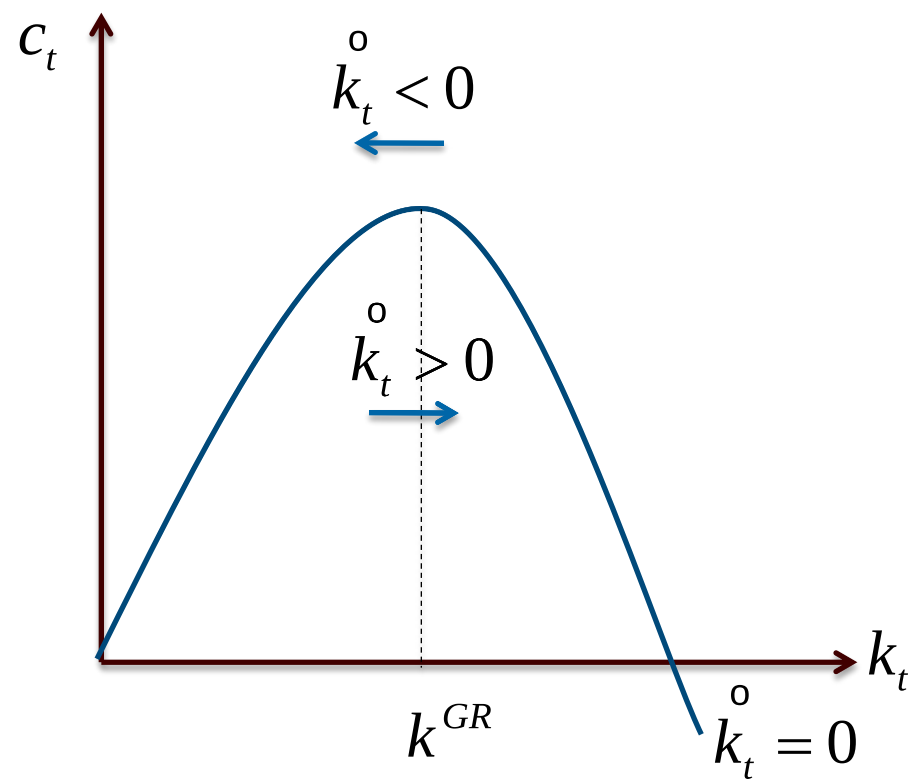
$$f'\left(k^*\right)-\left(\rho+\delta\right)=0$$

Condiciones de Segundo Orden

$$Hes(Ham)(c^*,k^*,\lambda^*,t)=\begin{bmatrix} e^{-(\rho-n)t}u''(c^*) & 0 \\ 0 & \lambda^* f''(k^*) \end{bmatrix}$$

Dinámica del Modelo





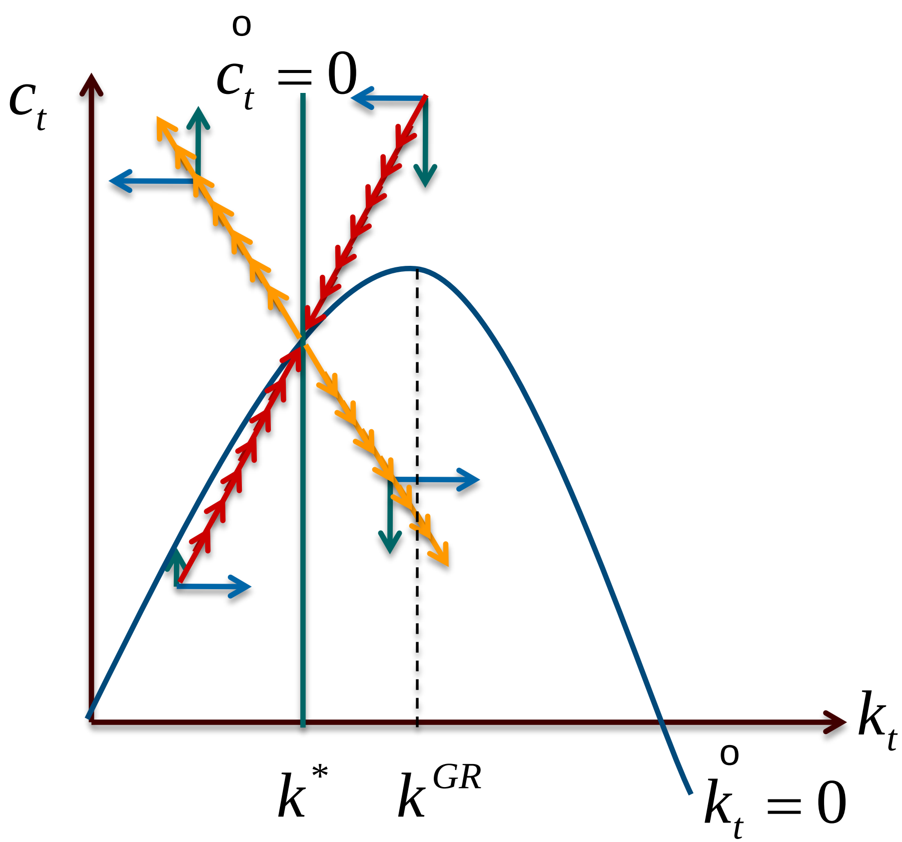
Ineficiencia Dinámica

$$f'(k^*) > f'(k^{GR})$$

…

$$k^* ? k^{GR}$$

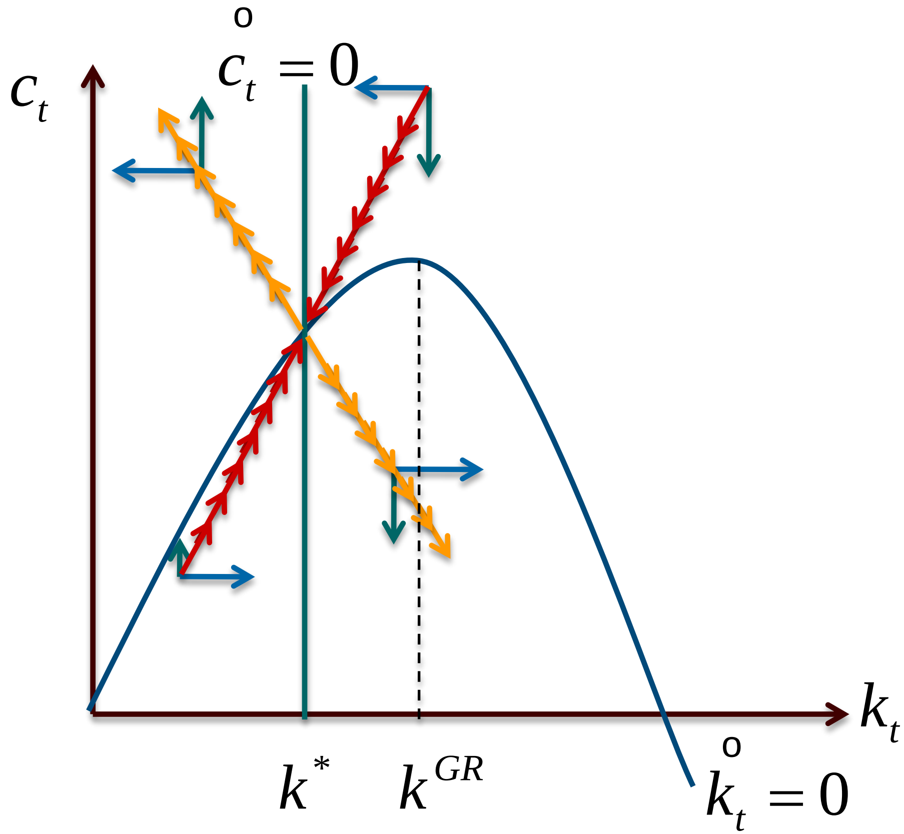
Dinámica del Modelo



Dinámica del Modelo

$$J=\left[\frac{\partial(\overset{o}{k},\overset{o}{c})}{\partial(k,c)}\right]_{(k^*,c^*)}=\begin{bmatrix}\rho-n & -1\\ \dfrac{c^*}{\sigma(c^*)}f''(k^*) & 0\end{bmatrix}$$

$$v_{1,2}=\frac{(\rho-n)\pm\sqrt{(\rho-n)^2-4\dfrac{c^*}{\sigma(c^*)}f''(k^*)}}{2}$$



Convergencia

Convergencia Absoluta

Convergencia Condicional

Implicaciones

- Capital (*k*)
  - El capital per cápita efectivo en estado estacionario depende de las variables(ρ, d).
  - k^* disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta.
- Consumo (*c*)
  - Relación negativa entre el consumo per cápita y, la tasa de descuento, la tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación.
- Ingreso (*y*)
  - y^* disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta.

Contenido

1 Modelo de RCK

2 Tecnología

3 Contraste empírico

4 Conclusiones

Ideas

- Inclusión de la tecnología en el modelo RCK
- Estática comparada
- Dinámica de transición

Supuestos

- Economía cerrada y sin gobierno.

$$Y_t = C_t + I_t \qquad ..(1)$$

- Familias propietarias de las empresas.

$$Y_t = C_t + S_t \qquad ..(2)$$

- Tres factores de producción:
  - Capital (K)
  - Trabajo (L)
  - Tecnología (A)

$$Y_t = F\left(K_t, L_t, A_t\right) \qquad ..(3)$$

Supuestos

- Función de producción con propiedades neoclásicas.
  - Rendimientos constantes a escala.
  - Productividad marginal positiva, pero decreciente
  - Condiciones de Inada
- Tasa de ahorro endógena

$$S_t = Y_t - C_t \qquad ..(4)$$

- Tasa de depreciación constante

$$I_t = \overset{o}{K}_t + D_t = \overset{o}{K}_t + \delta K_t$$

$$\overset{o}{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t \qquad ..(5)$$

Supuestos

- Tasa de crecimiento de la tecnología constante

$$\overset{o}{A}_t = gA_t$$

- Tasa de crecimiento de la población constante

$$\overset{o}{L}_t = nL_t$$

- Usando la función de producción en la ecuación (5)

$$\overset{o}{K}_t = F\left(K_t, L_t, A_t\right) - C_t - \delta K_t \quad ..(6)$$

Supuestos

Movimiento de capital per cápita

Teniendo en cuenta:

$$\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

Reemplazando en la ecuación (6), obtenemos:

$$\overset{\circ}{\tilde{k}}_t = f\left(\tilde{k}_t\right) - c_t - (n + \delta + g)\tilde{k}_t \qquad \text{..(7)}$$

Problema principal

$$\text{Max} \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(\tilde{c}_t) dt$$

$$\text{s.a}: \quad \overset{o}{\tilde{k}} = f(\tilde{k}_t) - \tilde{c}_t - (n+\delta+g)\tilde{k}_t$$

Solución del problema

Dos opciones

- Dictador benevolente.
- Mercados competitivos.

Solución del problema

Se reduce en:

$$\overset{o}{\tilde{k}}_t = f\left(\tilde{k}_t\right) - \tilde{c}_t - \left(n + \delta + g\right)\tilde{k}_t$$

$$\frac{\overset{o}{\tilde{c}}_t}{\tilde{c}_t} = -\frac{u'\left(\tilde{c}_t\right)}{\tilde{c}_t u''\left(\tilde{c}_t\right)}\left[f'\left(\tilde{k}_t\right) - \left(\rho + \delta + g\right)\right]$$

Estado estacionario y C2O

Estado Estacionario

$$f\left(\tilde{k}*\right)-\tilde{c}*-\left(n+\delta+g\right)\tilde{k}*=0$$
$$f'\left(\tilde{k}*\right)-\left(\rho+\delta+g\right)=0$$

Condiciones de Segundo Orden

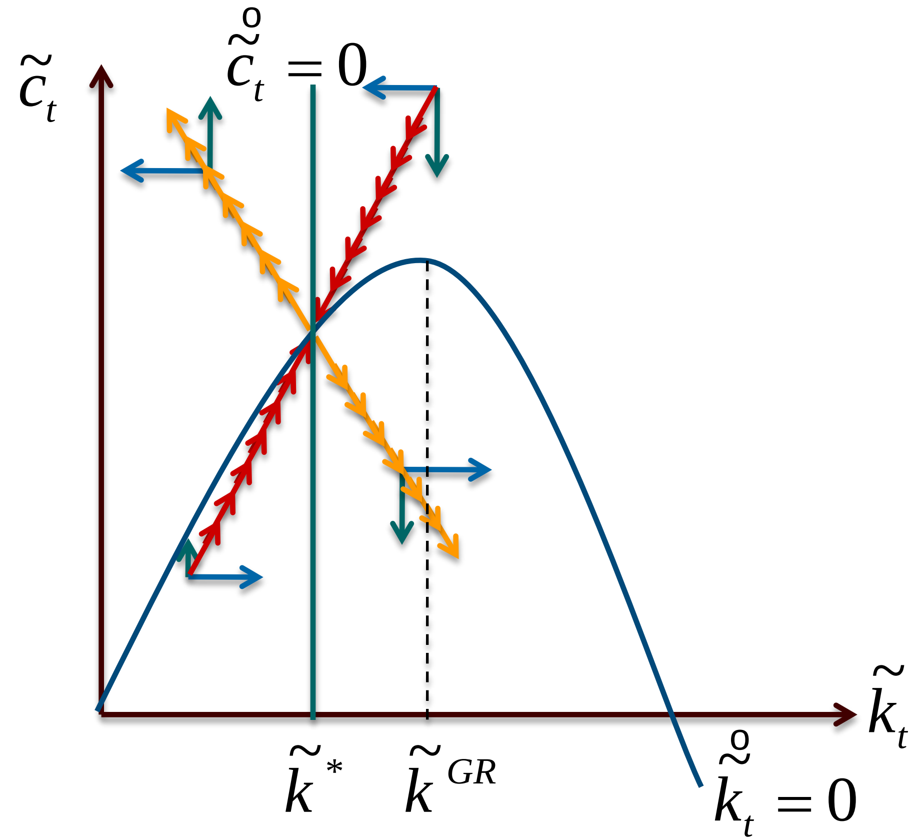
$$Hes(Ham)(\tilde{c}*,\tilde{k}*,\lambda*,t)=\begin{bmatrix} e^{-(\rho-n)t}u''(\tilde{c}*) & 0 \\ 0 & \lambda* f''(\tilde{k}*) \end{bmatrix}$$

Estabilidad y dinámica

Dinámica del modelo

$$J = \left[\frac{\partial(\mathring{\tilde{k}}, \mathring{\tilde{c}})}{\partial(\tilde{k}, \tilde{c})} \right]_{(\tilde{k}^*, \tilde{c}^*)} = \begin{bmatrix} \rho - n & -1 \\ \frac{\tilde{c}^*}{\sigma(\tilde{c}^*)} f''(\tilde{k}^*) & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{1,2} = \frac{(\rho - n) \pm \sqrt{(\rho - n)^2 - 4 \frac{\tilde{c}^*}{\sigma(\tilde{c}^*)} f''(\tilde{k}^*)}}{2}$$



Ejercicio: Cambio en “n”

Estado estacionario

$$f'(\tilde{k}^*) - (\rho + \delta + g) = 0$$

$$f(\tilde{k}^*) - \tilde{c}^* - (n + \delta + g)\tilde{k}^* = 0$$

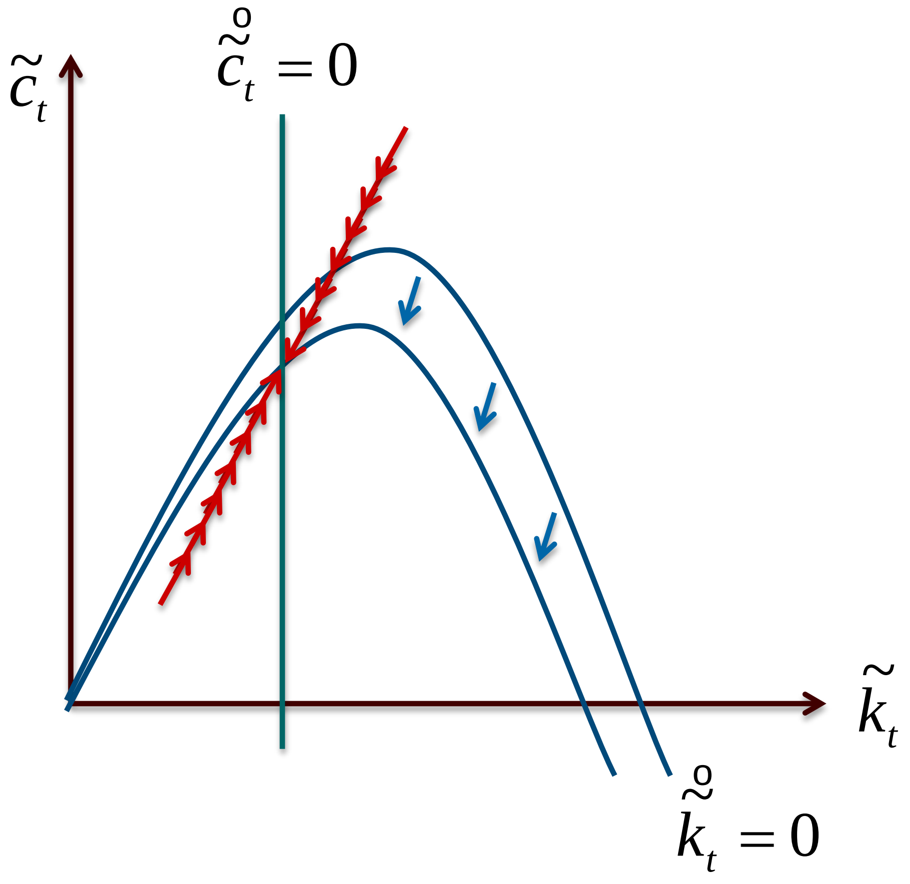
Resultado a LP

$$f''(\tilde{k}^*)\frac{\partial \tilde{k}^*}{\partial n} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \tilde{k}^*}{\partial n} = 0$$

$$-\frac{\partial \tilde{c}^*}{\partial n} - \tilde{k}^* = 0 \longrightarrow \frac{\partial \tilde{c}^*}{\partial n} = -\tilde{k}^*$$

Ejercicio: Cambio en “n”

Aumento de la tasa de crecimiento de la población



Ejercicio: cambio en *p*

Estado estacionario

$$f'(k^*) - (\rho + \delta + g) = 0$$

$$f(k^*) - c^* - (n + \delta + g)k^* = 0$$

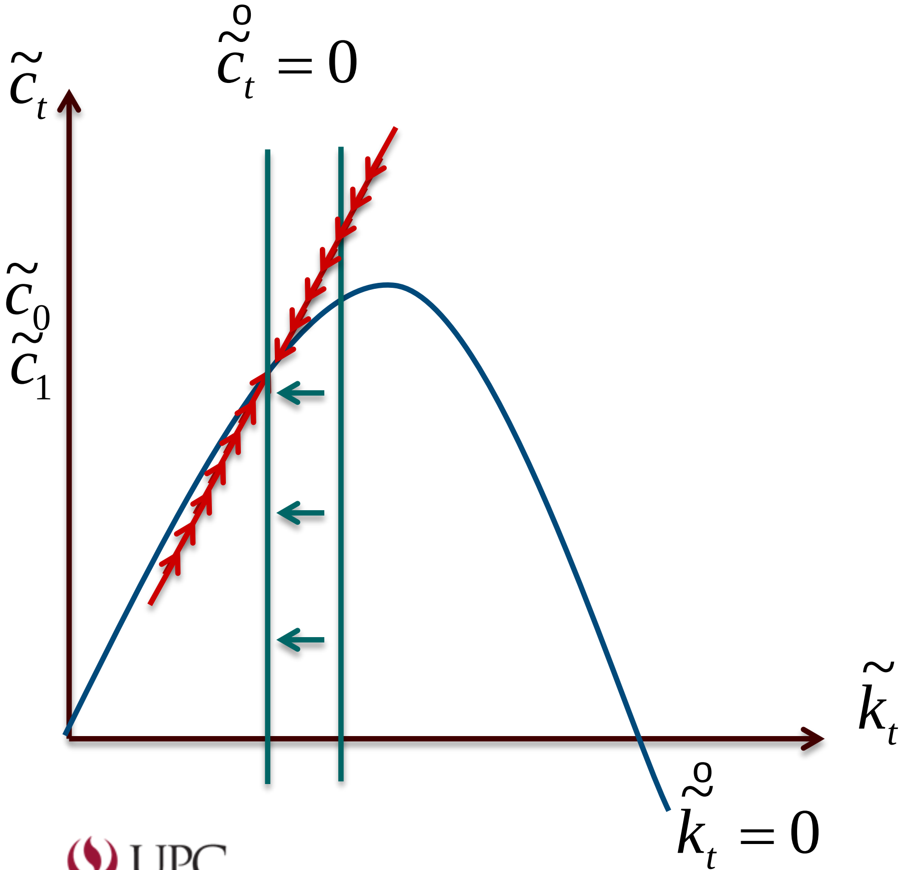
Resultado a LP

$$f''(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial \rho} - 1 = 0 \longrightarrow \frac{\partial k^*}{\partial \rho} = \frac{1}{f''(k^*)}$$

$$f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial \rho} - \frac{\partial c^*}{\partial \rho} - (n + \delta + g)\frac{\partial k^*}{\partial \rho} = 0 \longrightarrow \frac{\partial c^*}{\partial \rho} = \frac{\rho - n}{f''(k^*)}$$

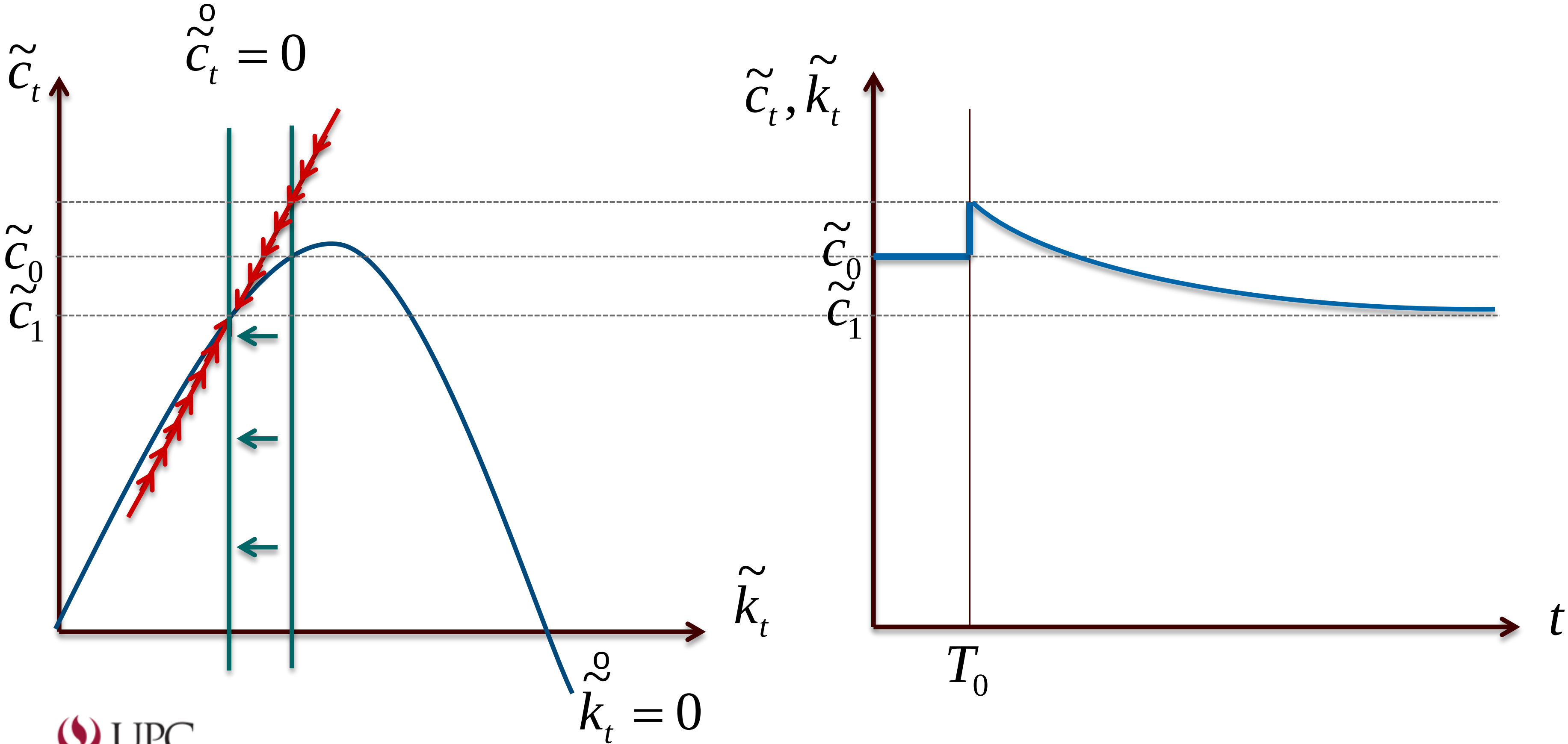
Ejercicio: cambio en *p*

Dinámica del modelo



Ejercicio: cambio en *p*

Dinámica del modelo



RCK vs Solow

Ineficiencia Dinámica

$$f'(k^*) > f'(k^{GR})$$

$$k^* < k^{GR}$$

Convergencia Absoluta y Convergencia Condicional.

Implicaciones

- Capital (*k*)
  - El capital per cápita efectivo en estado estacionario depende de las variables(ρ, d, g).
  - k^* disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta.
- Consumo (*c*)
  - Relación negativa entre el consumo per cápita y, la tasa de descuento, la tasa de crecimiento de la población, la tasa de depreciación y la tasa de crecimiento de la tecnología.
- Ingreso (*y*)
  - y^* disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Implicaciones

- Retorno del capital: $f'(k)$
  - Relación positiva con el factor de descuento de la utilidad, depreciación y el crecimiento de la tecnología.
- Salarios: $f(k)-kf'(k)$
  - Relación inversa con utilidad, depreciación y el crecimiento de la tecnología.
- Participación del capital (α)
  - Afecta positivamente al capital, producto, consumo y salario. Tiene Relación nula con el retorno de capital.

Contenido

1. Modelo de RCK
2. Tecnología
3. Contraste empírico
4. Conclusiones

Contraste Empírico (Kaldor)

- Producto per cápita crece a través del tiempo y este ratio de crecimiento no tiende a disminuir.

$$Ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right) = gt + \varepsilon_t$$

- Capital per cápita crece a través del tiempo.

$$\frac{\overset{o}{K}}{K} = g$$

- El ratio de retorno de capital es casi constante.

$$f'(k^*) = n + \delta + g$$

Contraste Empírico (Kaldor)

- El ratio de *K* – *Y* es cercano a un valor constante.

$$\frac{K}{Y}=\frac{\frac{K}{AL}}{\frac{F(K,AL)}{AL}}=\frac{\tilde{k}}{f(\tilde{k})}$$

- Las participaciones de trabajo y capital físico en el ingreso nacional son casi constantes. Función Cobb-Douglas

$$\frac{KF_K(K,AL)}{F(K,L)}=\alpha \qquad \frac{L.F_L(K,AL)}{F(K,L)}=1-\alpha$$

- El ratio de crecimiento de producto por trabajador difiere a través de los países.

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Contraste Empírico (Romer)

- La tasa de crecimiento no varía con el nivel inicial de renta per cápita.
- El crecimiento económico esta correlacionado con el del volumen del comercio.
- Las tasas de crecimiento de la población están correlacionadas negativamente con el nivel de renta.
- La tasa de crecimiento de los factores productivos no es suficiente para explicar el crecimiento del producto per cápita.
- Los trabajadores, cualificados o no, tienden a emigrar de los países de renta baja a los que tienen renta alta.

Contenido

Conclusiones

- Una herramienta teórica muy importante en el estudio del crecimiento económico.
- Un avance importante es la inclusión de la tecnología en el modelo.
- Inclusión de los conceptos de convergencia condicional y convergencia absoluta.
- Presenta conclusiones simples de la relación entre las variables exógenas y endógenas del modelo.
- El crecimiento no se puede resumir en pocas variables.
- Es uno de los más importantes en el área del estudio del crecimiento económico.

UPC

UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

Modelo de Crecimiento Neoclásico

Ronald Cuela