Generaciones Traslapadas

Ronald Cuela

Contenido

1. Un Modelo Intertemporal
2. El Modelo Básico de GT
3. SSS Totalmente Financiado
4. SSS No Financiado

Un Modelo Intertemporal

- Un agente vive 2 períodos
- No existe incertidumbre
- No existe restricción de ahorro o préstamo
- Separabilidad de la función de utilidad
- Descuento de la utilidad futura

Un Modelo Intertemporal

Problema:

$$\underset{c_1, c_2}{Max}: \quad u(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

$$s.a.: \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w$$

Lagrangiano:

$$L = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda\left(w - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right)$$

Solución:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$$

Un Modelo Intertemporal

Una visión distinta del problema:

$$\underset{c_1,c_2}{Max}: \quad u(c_1,c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

$$s.a.: \quad c_1 = w - s$$
$$c_2 = s(1+r)$$

Problema:

$$\underset{s}{Max}: \quad u[c_1(s), c_2(s)] = u[w-s] + \beta u[s(1+r)]$$

Solución:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$$
$$u'[w-s] = \beta(1+r)u'[s(1+r)]$$

Teoría Macrodinámica – Ronald Cuela

Contenido

1. Un Modelo Intertemporal
2. El Modelo Básico de GT
3. SSS Totalmente Financiado
4. SSS No Financiado

Teoría Macrodinámica – Ronald Cuela

El modelo básico de GT

- Un agente vive 2 períodos
- No existe incertidumbre
- No existe restricción de ahorro o préstamo
- Separabilidad de la función de utilidad
- Descuento de la utilidad futura
- En un período viven 2 generaciones, jóvenes y viejos.
- Sólo los jóvenes reciben un único salario.
- Tasa de crecimiento de la población constante

El modelo básico de GT

Nomenclatura:

$$c_t^t = c_{tiempo}^{generación}$$

Consumo de la generación t cuando son viejos:

$$c_{t+1}^t$$

Salario de los jóvenes de la generación t

$$s_t$$

El modelo básico de GT

1. ¿Cómo se determinan los niveles de consumo óptimos?

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t = w_t - s_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t(1 + r_{t+1})$$

Problema:

$$\underset{s}{Max}: \quad u\left[c_t^t(s_t), c_{t+1}^t(s_t)\right] = u\left[w_t - s_t\right] + \beta u\left[s_t(1 + r_{t+1})\right]$$

El modelo básico de GT

1. ¿Cómo se determinan los niveles de consumo óptimos?

Solución:

$$u'\left[w_t - s_t\right] = \beta(1 + r_{t+1}) u'\left[s_t(1 + r_{t+1})\right]$$

Ahorro Óptimo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

Se pueden determinar a partir del ahorro óptimo

El modelo básico de GT

2. ¿Cómo se determina el ahorro óptimo?

$$s_t = s(\overset{+}{w_t}, \overset{+/-}{r_{t+1}})$$

Recordando la solución:

$$u'[w_t - s_t] = \beta(1+r_{t+1})u'[s_t(1+r_{t+1})]$$

Derivando respecto al salario:

$$u''[w_t - s_t]\left(1-\frac{\partial s_t}{\partial w_t}\right) = \beta(1+r_{t+1})u''[s_t(1+r_{t+1})](1+r_{t+1})\left(\frac{\partial s_t}{\partial w_t}\right)$$

$$\frac{\partial s_t}{dw_t} = \frac{u''[w_t - s_t]}{u''[w_t - s_t] + \beta(1+r_{t+1})^2 u''[s_t(1+r_{t+1})]}$$

El modelo básico de GT

2. ¿Cómo se determina el ahorro óptimo?

$$s_t = s(\overset{+}{w_t}, \overset{+/-}{r_{t+1}})$$

Recordando la solución:

$$u'[w_t - s_t] = \beta(1+r_{t+1})u'[s_t(1+r_{t+1})]$$

Derivando respecto a la tasa de interés:

…

$$\frac{\partial s_t}{dr_{t+1}} = \frac{-\beta u'[w_t - s_t] - \beta(1+r_{t+1})s_t u''[(1+r_{t+1})s_t]}{u''[w_t - s_t] + \beta(1+r_{t+1})^2 u''[(1+r_{t+1})s_t]}$$

Se pueden determinar a partir del salario y tasa de interés

El modelo básico de GT

3. ¿Cómo se determinan el salario y la tasa de interés?

En el mercado de factores

- Las empresas utilizan 2 factores: Capital y Trabajo.

$$Y_t = F(K_t, N_t)$$

- Las empresas pagan a los factores de acuerdo a su productividad marginal.

$$B_t = F(K_t, N_t) - r_t K_t - w_t N_t$$

$$r_t = F_{K_t}$$

$$w_t = F_{N_t}$$

El modelo básico de GT

3. ¿Cómo se determinan el salario y la tasa de interés?

- La función de producción es homogénea de grado 1.

$$\frac{Y_t}{N_t} = \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) = f(k_t)$$

$$r_t = F_{K_t} = f'(k_t)$$

$$w_t = F_{N_t} = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Se pueden determinar a partir del capital percápita

El modelo básico de GT

4. ¿Cómo se determinan el capital percápita?

En Equilibrio:

- La empresas requieren para la producción en t+1: K_{t+1}
- Los jóvenes de la generación t ahorraron para t+1: $s_t N_t$

$$K_{t+1} = N_t s[w_t, r_{t+1}]$$

$$k_{t+1} = \frac{s_t\left[f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})\right]}{1+n}$$

Se pueden determinar a partir de este equilibrio

El modelo básico de GT

5. Características del estado estacionario

- Múltiples equilibrios:

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{-k_t f''(k_t) s_w}{1+n - f''(k_{t+1}) s_r}$$

- Condición de estabilidad:

$$\left\| \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} \right\| < 1$$

- Condición de no oscilación:

$$0 < \left\| \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} \right\| < 1$$

Contenido

SSS Totalmente Financiado

Nomenclatura

- Contribución de los jóvenes:

$$d_t$$

- Pensión de los viejos:

$$b_t$$

Un agente de la generación t recibe de viejo lo que aportó de joven más el interés de mercado.

SSS Totalmente Financiado

Niveles óptimos sin SSS Totalmente Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t + s_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t(1 + r_{t+1})$$

Ahorro Óptimo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

SSS Totalmente Financiado

Niveles óptimos con SSS Totalmente Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t + s_t^{(1)} + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t^{(1)}(1 + r_{t+1}) + b_t$$

En este sistema de seguridad social: $b_t = (1 + r_{t+1}) d_t$

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t + \left(s_t^{(1)} + d_t\right) = w_t$$

$$c_{t+1}^t = \left(s_t^{(1)} + d_t\right)(1 + r_{t+1})$$

SSS Totalmente Financiado

Conclusiones

Si el ahorro en condiciones de ausencia del SSS es mayor o igual al aporte bajo el SSS TF.

$$s_t \geq d_t$$

La solución no se modifica, el ahorro total se divide en una parte obligatoria y otra voluntaria.

$$s_t = s_t^{(1)} + d_t$$

La acumulación de capital no es afectada.

SSS Totalmente Financiado

Conclusiones

Si el ahorro en condiciones de ausencia del SSS es menor al aporte bajo el SSS TF.

$$s_t < d_t$$

La solución se modifica, se esperaría que el ahorro total sería igual al aporte.

$$s_t = d_t \qquad s_t^{(1)} = 0$$

La acumulación de capital es afectada.

Contenido

SSS No Financiado

Nomenclatura

- Contribución de los jóvenes:

$$d_t$$

- Pensión de los viejos:

$$b_t$$

Un agente de la generación t recibe de viejo la parte proporcional del aporte de todos los jóvenes de la generación t+1.

SSS No Financiado

Niveles óptimos sin SSS No Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t + s_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t(1 + r_{t+1})$$

Ahorro Óptimo:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

SSS No Financiado

Niveles óptimos con SSS No Financiado

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t + s_t^{(2)} + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t^{(2)}(1 + r_{t+1}) + b_t$$

En este sistema de seguridad social: $b_t = (1+n)d_t$

$$\underset{c_t^t, c_{t+1}^t}{Max}: \quad u(c_t^t, c_{t+1}^t) = u(c_t^t) + \beta u(c_{t+1}^t)$$

$$s.a.: \quad c_t^t + s_t^{(2)} + d_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = s_t^{(2)}(1 + r_{t+1}) + d_t(1+n)$$

SSS No Financiado

Conclusiones

El ahorro se distorsiona.

La acumulación disminuye, porque una parte del ahorro de los jóvenes se va a sostener el consumo de los viejos y no a la producción.

$$s_t = s_t^{(2)} + d_t$$

La acumulación de capital es afectada.

Teoría Macrodinámica

Ronald Cuela