UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CCSS
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ECONÓMICA

TEORÍA MACRODINÁMICA - EA811

RONALD AUGUSTO CUELA ALVAREZ

APUNTES DE CLASES Nº 07
MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO[1]

[1] Este documento es elaborado para facilitar el aprendizaje del curso y no reemplaza la bibliografía referente a este tema.

1. Diferencias entre modelos de crecimiento endógeno y exógeno

Los modelos de crecimiento endógeno incorporan variables que permiten explicar el crecimiento económico con resultados del modelo y no con valores exógenos ajenos a este. Estos modelos además añaden factores que no incluye el modelo neoclásico como el gobierno, externalidades, capital humano, investigación y desarrollo, crimen, democracia, etc. de tal forma que permitan explicar el crecimiento con las conclusiones de dichos modelos.

Se levanta el supuesto de tasa de crecimiento de la tecnología exógena y ésta es explicada dentro del modelo ya sea por rendimientos crecientes a escala, externalidades, aprendizaje, gasto público, etc. Estos modelos explican por factores endógenos las tasas de crecimiento de las economías.

Seis diferencias

i) La tasa de crecimiento del producto puede ser positiva.
ii) La tasa de crecimiento viene dada por factores visibles.
iii) La economía carece de estado estacionario, la economía está en constante crecimiento.
iv) No existe relación entre la tasa de crecimiento y el nivel alcanzado por la renta nacional (no predice convergencia condicional ni absoluta).
v) El modelo AK predice que los efectos de recesión temporal serán permanentes (no porque caiga drásticamente el capital la economía crecerá más rápido).
vi) No puede haber demasiada inversión, la economía no puede encontrarse en la zona dinámicamente ineficiente.

2. Modelos AK

Los modelos de tipo AK, tienen la función de producción $F(A, K_t, L_t) = AK_t$, se considera A constante, la función expresada en términos per cápita sería $f(k_t) = Ak_t$.

Supuestos adicionales:
Elasticidad de sustitución intertemporal del consumo constante

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

Por lo que la función de utilidad total descontada al período inicial se escribiría.

$$U(c) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\ dt$$

Las familias determinan óptimamente su consumo y ahorro, además se dedican a la producción de bienes.
Se trata de una economía cerrada, sin gobierno, por lo tanto el ahorro es igual a la inversión y la acumulación de capital proviene únicamente de la inversión descontada de la depreciación. Como se vio en los apuntes anteriores la acumulación de capital viene dada por la expresión:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$$

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t$$

El Hamilatoniano del problema tiene la siguiente forma:

$$H = e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + v_t\left(Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t\right)$$

Las condiciones de primer orden

$$H_c = 0 \qquad \rightarrow v_t = e^{-(\rho-n)t}\ c_t^{-\sigma} \qquad (1)$$

$$H_k = -\dot{v}_t \qquad \rightarrow v_t(A - n - d) = -\dot{v}_t \qquad (2)$$

$$H_v = \dot{k}_t \qquad \rightarrow \dot{k}_t = Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t \qquad (3)$$

La condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} v_t k_t = 0 \qquad (4)$$

De (1) y (2) encontramos la tasas de crecimiento del consumo.

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}(A - \rho - \delta) \qquad (5)$$

En estado estacionario, se obtiene que

$$\gamma_y^* = \gamma_k^* = \gamma_c^* = \gamma^* = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}(A - \rho - \delta)$$

Conclusiones

Dinámica de transición

En estado estacionario, todas las variables per capita crecen a una tasa constante.
El consumo siempre crece a la misma tasa.
Consecuencia: El consumo siempre se encuentra en estado estacionario.

El capital y el producto también crecen a la misma tasa.
Consecuencia: El modelo no presenta transición alguna hacia el estado estacionario.
Todas las variables crecen permanentemente a una tasa constante.

Hipótesis de convergencia

A diferencia del modelo neoclásico (Solow y Swan, Ramsey Cass y Koopmans), este modelo no predice la convergencia entre economías, ni absoluta ni condicional.
La tasa de crecimiento no está relacionada negativamente con la renta.

3. Modelos con gasto público productivo

El gasto público productivo orientado a la compra de bienes público, no rival y no excluible, por lo tanto la función de producción para una empresa "j" puede modelarse de la siguiente manera:

$$y_j = Ak_j^{\alpha} G^{1-\alpha}$$

Si percibimos este gasto dirigido a adquirir bienes públicos sujetos a congestión, parcialmente excluible, la parte del bien público utilizada por una empresa "j" sería una parte proporcional del gasto, prorrateada por su capital, y su función de producción sería:

$$y_j = Ak_j^{\alpha}\left(\frac{G}{K}\right)^{1-\alpha}$$

Por último si consideramos la compra de bienes privados (bienes rivales y excluibles), el gasto del gobierno se dirigirá en forma individual a cada una de las empresas y la función de producción de esta empresa se expresará:

$$y_j = Ak_j^{\alpha} g^{1-\alpha}$$

Éste último es el enfoque de Barro y que estudiaremos en este apartado.
Los supuestos que se incorporan (diferentes a los modelos anteriores):
Inclusión del gobierno (aunque parece obvio) y se cumple el equilibrio fiscal, para ello el gobierno financia su gasto únicamente con los ingresos que tiene por impuestos.
El único impuesto que existe es el impuesto al ingreso.

Como en los casos anteriores, la función de utilidad se expresa de la siguiente forma:

$$U(c) = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\, dt$$

Solución de las Familias productoras

El incremento del stock de capital per cápita puede expresarse como (queda la demostración para el lector):

$$\dot{k}_t = (1-\tau_t)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$$

El Hamiltoniano se escribe de la siguiente forma:

$$H = e^{-(\rho-n)t}\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + v_t\left((1-\tau_t)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t\right)$$

Las condiciones de primer orden

$$H_c = 0 \qquad \rightarrow v_t = e^{-(\rho-n)t} \; c_t^{-\sigma} \qquad (1)$$

$$H_k = -\dot{v}_t \qquad \rightarrow v_t((1-\tau_t)\alpha Ak_t^{\alpha-1} g_t^{1-\alpha} - n - d) = -\dot{v}_t \qquad (2)$$

$$H_v = \dot{k}_t \qquad \rightarrow \dot{k}_t = Ak_t - c_t - (n+\delta)k_t \qquad (3)$$

La condición de transversalidad

$$\underset{t\rightarrow\infty}{Lim} \; v_t k_t = 0 \qquad (4)$$

De las dos primeras condiciones podemos encontrar a tasa de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau_t)\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \rho - \delta\right] \qquad (5)$$

Como el gasto del gobierno sólo es financiado por el impuesto a la renta

$$\tau_t y_t = g_t$$

$$g_t = \tau_t^{1/\alpha} A^{1/\alpha} k_t \qquad (6)$$

Si juntamos la tasa de crecimiento del consumo (5) y la ecuación de equilibrio fiscal (6)

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}((1-\tau_t)\alpha A^{1/\alpha} \tau_t^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho - \delta) \qquad (7)$$

De la ecuación de equilibrio fiscal (6), podemos deducir el peso del gobierno en la economía:

$$\tau_t = \frac{g_t}{y_t}$$

En la ecuación de movimiento del consumo (7), encontramos que el crecimiento del consumo depende de la tasa impositiva. El gobierno puede maximizar el crecimiento de la economía, optimizando su tamaño:

$$\frac{d\gamma_c}{d\tau} = 0 \qquad \rightarrow \tau^* = 1-\alpha \qquad (8)$$

El Estado maximiza la tasa de crecimiento del consumo tomando un tamaño similar a la participación del gasto público en la función de producción.

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left(\alpha^2 A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho - \delta\right)$$

Solución del Planificador

La solución del planificador difiere, debido a que este toma en consideración los efectos distorsionadotes del impuesto sobre la renta.

En este caso, se tiene en cuenta que el ingreso se repartirá entre consumo inversión y gasto del gobierno.

$$y_t = c_t + i_t + g_t$$

el incremento del capital consecuentemente será

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t - g_t$$

El Hamiltoniano se reescribe de la siguiente manera

$$H = e^{-(\rho-n)t}\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + v_t\left(Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t - g_t\right)$$

Las condiciones de primer orden

$$H_c = 0 \qquad \rightarrow v_t = e^{-(\rho-n)t}\ c_t^{-\sigma} \qquad (9)$$

$$H_g = 0 \qquad \rightarrow v_t\left(A(1-\alpha)k_t^{\alpha} g_t^{-\alpha} - 1\right) = 0 \qquad (10)$$

$$H_k = -\dot{v}_t \qquad \rightarrow v_t(A\alpha k_t^{\alpha-1} g_t^{1-\alpha} - n - d) = -\dot{v}_t \qquad (11)$$

$$H_v = \dot{k}_t \qquad \rightarrow \dot{k}_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t - g_t \qquad (12)$$

La condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} v_t k_t = 0 \qquad (13)$$

De las condiciones (9) y (11) podemos encontrar a tasa de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \rho - \delta\right] \qquad (13)$$

De la condición (10):

$$\frac{g_t}{k_t} = A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{1/\alpha} \qquad (14)$$

Reemplazando el resultado (14) en la tasa de crecimiento del consumo (13)

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}(\alpha A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho - \delta)$$

Este crecimiento es mayor a la del caso de familias productoras, debido a que el planificador toma en consideración los efectos distorsionantes del impuesto a la renta.

$$\gamma^*(FP) < \gamma^*(Pl)$$

El Gobierno optimiza esta tasa de crecimiento cuando adopta un tamaño similar a la participación del gasto público en la función de producción (queda para el lector esta demostración)

$$\frac{g_t}{y_t} = (1-\alpha)$$

Además se observa que tanto en la solución de las familias productoras (FP) como en la del planificador (Pl) las tasas de crecimiento del gasto, producto y capital son similares a la del consumo, en cada caso.

$$\gamma_y^*(FP) = \gamma_k^*(FP) = \gamma_c^*(FP) = \gamma^*(FP)$$
$$\gamma_y^*(Pl) = \gamma_k^*(Pl) = \gamma_c^*(Pl) = \gamma^*(Pl)$$

Otras extensiones

También se puede modelar el gasto público que no es productivo, sino que va dirigido a incrementar la utilidad de las personas, es decir que el gasto público se modele dentro de la función de utilidad.

4. Modelo con Capital Humano

En este modelo se considera dos sectores productivos

Producción de bienes físicos, que pueden ser consumidos o convertidos en capital

$$\dot{K} = AK_K^{\alpha} H_K^{1-\alpha}(t) - C - \delta_K K$$

Producción de capital humano.

$$\dot{H}_t = BK_H^{\beta} H_H^{1-\beta} - \delta_H H$$

El capital físico y humano total

$$K_t = K_K + K_H$$
$$H_t = H_K + H_H$$

Una fracción del capital humano se destina a la producción de bienes físicos.

$$H_K(t) = u_t H_t$$
$$H_H(t) = (1 - u_t) H_t$$

Además se esperaría que el sector de producción de capital humano sea más intensivo en capital humano que el sector de producción de bienes físicos. Añadiendo los siguientes supuestos simplificadores:

$$\alpha > \beta = 0$$
$$\delta_H = \delta_K = \delta$$

Con esto las funciones de acumulación de capital de nuestros modelos se simplifican en

Producción de bienes físicos

$$\dot{K}_t = AK_t^{\alpha}(u_t H_t)^{1-\alpha} - C_t - \delta K_t$$

Producción de capital humano.

$$\dot{H}_t = B(1 - u_t) H_t - \delta H_t$$

La función de utilidad se expresa:

$$U(c) = \int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}\, dt$$

Planteamiento del problema

La función de producción de ambos sectores en términos per cápita se escriben:

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$$

$$\dot{h}_t = B(1-u_t)h_t - (n+\delta)h_t$$

El hamiltoniano:

$$H = e^{-(\rho-n)t}\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + v_t\left(Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t\right) + \lambda_t\left(B(1-u_t)h_t - (n+\delta)h_t\right)$$

Las condiciones de primer orden

$$H_c = 0 \qquad \to v_t = e^{-(\rho-n)t}\ c_t^{-\sigma} \tag{1}$$

$$H_u = 0 \qquad \to v_t\left(A(1-\alpha)k_t^{\alpha}u_t^{-\alpha}h_t^{1-\alpha}\right) - \lambda_t B h_t = 0 \tag{2}$$

$$H_k = -\dot{v}_t \qquad \to v_t(A\alpha k_t^{\alpha-1}(u_t h_t)^{1-\alpha} - n - d) = -\dot{v}_t \tag{3}$$

$$H_h = -\dot{\lambda}_t \qquad \to v_t\left(A(1-\alpha)k_t^{\alpha}u_t^{1-\alpha}h_t^{-\alpha}\right) + \lambda_t\left(B(1-u_t) - n - \delta\right) = -\dot{\lambda}_t \tag{4}$$

$$H_v = \dot{k}_t \qquad \to \dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}(u_t h_t)^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t \tag{5}$$

$$H_\lambda = \dot{h}_t \qquad \to \dot{h}_t = B(1-u_t)h_t - \delta h_t \tag{6}$$

Las condiciones de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} v_t k_t = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t h_t = 0 \tag{8}$$

De la primera condición

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left(-\frac{\dot{v}_t}{v_t} - \rho - n\right) \tag{9}$$

Reemplazando en la tercera ecuación, encontramos la tasa de crecimiento del consumo:

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left(A\alpha\ k_t^{\alpha-1}(u_t h_t)^{1-\alpha} - \rho - \delta\right) \tag{10}$$

Estado estacionario

Definimos el estado estacionario, como aquella situación donde todas las variables crecen a un ritmo constante. La fracción u_t es un valor comprendido entre cero y uno y tiende a un valor constante.

De la ecuación (10) se puede obtener

$$\left(\frac{h_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} = \frac{\gamma_c\sigma + \rho + \delta}{A\alpha\ u_t^{(1-\alpha)}} \tag{11}$$

De (9), como en estado estacionario u_t y γ_c son constantes, la proporción $\left(\frac{h_t}{k_t}\right)$ será constante y consecuentemente las tasas de crecimiento de ambos capitales son iguales.

$$\gamma_h = \gamma_k \tag{12}$$

De la segunda condición de primer orden se puede encontrar

$$\frac{v_t}{\lambda_t} = \frac{1}{\frac{A}{B}\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}(1-\alpha)u_t^{-\alpha}} \qquad (13)$$

Como u_t y la proporción $\left(\frac{h_t}{k_t}\right)$ son constantes, la razón $\left(\frac{v_t}{\lambda_t}\right)$ será constante en estado estacionario, por lo que se demuestra las variables de coestado crecen a la misma tasa:

$$\gamma_v = \gamma_\lambda \qquad (14)$$

Dividiendo (5) entre k_t

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = Au_t^{1-\alpha}\left(\frac{h_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \frac{c_t}{k_t} - (n+\delta) \qquad (15)$$

Nuevamente por las conclusiones obtenidas a partir de (11) y (12)

$$\gamma_h = \gamma_k = \gamma_c \qquad (16)$$

Además teniendo en cuenta la función de producción de bienes físicos, encontramos que las variables de ingreso, capital físico, capital humano y consumo –todos en términos per cápita- crecen a la misma tasa.

$$\gamma_y = \gamma_h = \gamma_k = \gamma_c \qquad (17)$$

Sólo falta encontrar la tasa de crecimiento de la economía

Dividiendo (4) entre λ_t y haciendo arreglos

$$\frac{v_t}{\lambda_t}\left[A(1-\alpha)\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}u_t^{1-\alpha}\right] + \left(B(1-u_t) - n - \delta\right) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \qquad (18)$$

Reemplazando (13) en (18)

$$-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = B - n - \delta \qquad (19)$$

Reemplazando este resultado en (9) y teniendo en cuenta (17)

$$\gamma_y = \gamma_h = \gamma_k = \gamma_c = \frac{1}{\sigma}\left(B - \rho - \delta\right) \qquad (20)$$

Finalmente cuál es la proporción de capital humano destinado a producir bienes físicos, tomando la ecuación de movimiento del capital humano (6):

$$\frac{\dot{h}_t}{h_t} = \gamma^* = B(1-u_t) - (n+\delta)$$

$$1 - u^* = \frac{\gamma^* + n + \delta}{B} = \frac{B - \rho + \sigma n - \delta(1-\sigma)}{B\sigma}$$

15.3 Dinámica de transición

Existe, pero demasiado complicada para analizar.

Lucas (1988) la dejó sin investigar.

Caballé y Santos (1993): trayectoria estable hacia el punto de silla.

Mulligan y Sala-i-Martin (1993): método numérico

La dinámica de transición surge cuando:

$$\frac{k_0}{h_0} \neq \frac{k^*}{h^*}$$

- Si:

$$\frac{k_0}{h_0} < \frac{k^*}{h^*} \rightarrow \gamma > \gamma^*$$

$$\frac{k_0}{h_0} > \frac{k^*}{h^*} \rightarrow \gamma < \gamma^*$$

5. Modelo con externalidades

El siguiente modelo incorpora externalidades generadas por el stock de capital acumulado a diferencia del modelo de Lucas, donde las externalidades eran generadas por el stock de capital per capita, en este modelo las externalidades son generadas por el stock de capital agregado. La tecnología va a depender directamente del stock de capital agregado $A_t = a(K_t) = a_t$ de tal forma que la función de producción viene expresado como:

$$F(K_t, A_t L_t) = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha} = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} a_t^{1-\alpha}$$

De tal forma que la función de acumulación de capital per capita queda expresada como:

$$\dot{k}_t = k_t^{\alpha} a_t^{1-\alpha} - c_t - (n+d)k_t$$

La solución del mercado competitivo:

La función de utilidad tiene las mismas propiedades que en los casos anteriores, de tal forma que el Hamiltoniano para resolver el problema sería:

$$H : e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda \left[k^{\alpha} a^{1-\alpha} - c_t - (n+d)k_t \right]$$

Las condiciones de primer orden para resolver el problema serían:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho-n)t}u'(c_t) - \lambda_t = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \left[\alpha k^{\alpha-1}a^{1-\alpha} - (n+d)\right]\lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \qquad \ldots(3)$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)}\left[\alpha k_t^{\alpha} a_t^{1-\alpha} - (\rho+d)\right]$$

Si consideramos una relación lineal entre el capital agregado y el nivel de tecnología $a(K_t) = K_t$, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)}\left[\alpha L_t^{1-\alpha} - (\rho+d)\right]$$

Considerando que la función de utilidad tiene elasticidad de sustitución intertemporal constante obtenemos que la tasa de crecimiento del consumo para una economía con mercado competitivo sea:

$$\gamma_{MC} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta(c_t)}\left[\alpha L_t^{1-\alpha} - (\rho+d)\right]$$

La solución del planificador social:

La solución del planificador social va diferir de la solución del mercado competitivo porque el planificador social va incorporar la externalidad generada por el stock agregado de capital al introducir esta externalidad en su decisión.

El Hamiltoniano en este caso sería:

$$H : e^{-(\rho-n)t}u(c_t) + \lambda\left[k_t L_t^{1-\alpha} - c_t - (n+d)k_t\right]$$

Las condiciones de primer orden para resolver el problema serían:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho-n)t}u'(c_t) - \lambda_t = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \left[L^{1-\alpha} - (n+d)\right]\lambda_t = -\dot{\lambda}_t \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \qquad \ldots(3)$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)}\left[L_t^{1-\alpha} - (\rho + d)\right]$$

La solución para el planificador social será:

$$\gamma_{PS} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta(c_t)}\left[L_t^{1-\alpha} - (\rho + d)\right]$$

A diferencia del mercado competitivo notamos que en este caso el parámetro que acompaña a $L_t^{1-\alpha}$ es 1 y no α $(1 > \alpha)$, por lo que la tasa de crecimiento del consumo que obtiene el planificador es mayor que la del mercado competitivo, esto se debe a que las empresas no perciben la rentabilidad producida por incrementar su stock de capital, mientras que el planificador sí y este internaliza la externalidad generada por el stock agregado de capital.

6. Economía de las Ideas

En el modelo Neoclásico no existen recursos para financiar el crecimiento tecnológico. En el modelo de Romer si hay externalidades, progreso tecnológico subproducto de la inversión

$$Y_t = A k_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$k_t = \left[\sum_{j=1}^{N_t} x_{jt}^{\alpha}\right]^{1/\alpha}$$

$$Y_t = A\left[\sum_{j=1}^{N_t} x_{jt}^{\alpha}\right] L_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = A N_t x_t^{\alpha} L^{1-\alpha} = A(N_t x_t)^{\alpha} L_t^{1-\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-rt}(A L_t^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N_t} x_{jt}^{\alpha} - w_t L_t - \sum_{j=1}^{N} p_{jt} x_{jt})\partial t$$

$$w_t = A(1-\alpha) L^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N_t} x_{jt}^{\alpha}$$

$$\rho_{jt} = A\alpha L^{1-\alpha} x_{jt}^{\alpha-1}$$

$$x_{jt} = [A\alpha]^{1/1-\alpha} L_t p_{jt}^{-1/1-\alpha}$$

$$\underset{p_{jt}}{Max}\int_{s}^{\infty} e^{-r(t-s)}\left[(p_j-\in_t)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}Lp_t^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right]\partial t$$

$$e^{-r(t-s)}\left[(A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}Lp_{jt}^{-\frac{1}{1-\alpha}}+(p_j-\in_t)(A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}Lp_{jt}^{-\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot\cdot(-\frac{1}{1-\alpha})\right]=0$$

$$1=\left[\frac{1}{1-\alpha}\right]\left(\frac{p_{jt}-c}{p_{jt}}\right)$$

$$p_{jt}=\frac{\in}{\alpha}>\in$$

$$x_{jt}=x=A^{\frac{1}{1-\alpha}}L^{\frac{2}{1-\alpha}}\in^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$Y_t=AN_tL^{1-\alpha}\left[A^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}L^{\alpha}\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\in^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$$

$$Y_t=A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\in^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}N_t$$

$$\pi_{jt}=\left(\frac{\in}{\alpha}-\in\right)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}L\in^{-\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\pi=\pi_{jt}=\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]\in^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L$$

$$\int_{s}^{\infty} e^{-\gamma(t-s)}\pi\partial_t=\frac{\pi}{\gamma}$$

$$\left[\pi\frac{e^{-\gamma(t-s)}}{-\gamma}\right]_{t=s}^{\infty}=\underset{t\to\infty}{Lim}\frac{e^{-\gamma(t-s)}\pi}{-\gamma}+\frac{e^{-\gamma(t-t)}\pi}{\gamma}=\frac{\pi}{\gamma}$$

$$(\phi phi=\frac{\pi}{\gamma})$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta(c_t)}(r - \rho)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{\phi}$$

γ

Extensiones

7. <u>Trampas de Pobreza</u>

Son situaciones donde una economía no puede salir de la pobreza porque no tiene suficiente ahorro

Extensiones de la teoría de crecimiento