UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CCSS
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ECONÓMICA

TEORÍA MACRODINÁMICA - EA811
RONALD AUGUSTO CUELA ALVAREZ

APUNTES DE CLASES Nº 06
MODELO DE CRECIMIENTO NEOCLÁSICO[1]

[1] Este documento es elaborado para facilitar el aprendizaje del curso y no reemplaza la bibliografía referente a este tema.

1. Introducción

La teoría del crecimiento es una de las ramas más importantes de la ciencia económica en la actualidad, el crecimiento fue tratado desde los orígenes del pensamiento económico: Adam Smith, Ricardo, Thomas Malthus o Marx estudiaron el tema, teniendo en cuenta la acumulación de capital físico y humano, progreso tecnológico, especialización del trabajo; mientras Ricardo llega a un estado estacionario, Marx llegaba a un desastre para el sistema capitalista.

Harrod (1939) y Domar (1946) presentan otro grupo de estudios que ampliaban en el tiempo la dinámica introducida por Keynes (1936), llegando a resultados poco alentadores sobre la estabilidad del crecimiento. Ante este pesimismo, Solow (1956) y Swan (1956) presentan la respuesta neoclásica con un modelo básico de una economía dinámica, que sin duda ha representado un cambio en la teoría económica y es la base para el desarrollo de nuevos modelos de crecimiento económico.

El análisis fue complementado por los aportes de Cass (1965) y Koopmans (1965) que, a partir del enfoque de optimización intertemporal de Ramsey (1928) y utilizando principios neoclásicos, construyeron el modelo más popular de la teoría de crecimiento económico. El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans supera el problema de ineficiencia dinámica que presenta el Modelo de Solow. La economía al estado estacionario, debido a que la productividad marginal del capital per cápita es decreciente.

Romer (1986), Lucas (1988), Rebelo (1991) y Barro (1991) introducen externalidades, capital humano, gasto público en sus modelos denominados de crecimiento endógeno, estos modelos presentan la posibilidad de rendimientos crecientes a escala, entre otras características. Por ser un tema amplio, el estudio de estos modelos escapa a los alcances de este documento.

El modelo de crecimiento neoclásico ha sido y es estudiado por muchos autores y además forma una parte importante de cursos de *Macroeconomía Avanzada* y *Teorías de Crecimiento Económico* en Programas de Pregrado, Postgrado y Doctorado en Economía. Las explicaciones de la difusión de este modelo radican en la elegancia matemática y en la posibilidad de incluir variantes como la inclusión del gobierno, principalmente.

El objetivo del presente informe es la presentación formal del modelo de crecimiento neoclásico y el contraste de los resultados de este modelo con los hechos estilizados de Kaldor y Romer, para ello la monografía está estructurada de la siguiente manera:

El primer capítulo presenta el modelo neoclásico a partir del presentado por Solow-Swan, haciendo un mayor esfuerzo en presentar el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, el cual es desarrollado en su forma más general incluyendo desde el inicio el factor tecnológico.

El capítulo dos presenta las implicancias del modelo, es decir, las variaciones del producto per cápita que surgen a partir de los cambios en las variables exógenas.

En el tercer capítulo se discuten los resultados teóricos en contraste con los empíricos, aquí se presentan los hechos estilizados presentados por Kaldor y Romer.

En el último capítulo, las conclusiones presentan los resultados del estudio, asimismo se destacan las críticas y defensas más importantes de este modelo.

2. El Modelo de Solow

Supuestos

El modelo considera una economía cerrada y sin gobierno, el ingreso nacional se divide en consumo e inversión.

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (1)$$

Las familias son dueñas de las empresas por lo que ellas disponen de todo el ingreso y lo destinan al consumo y al ahorro.

$$Y_t = C_t + S_t \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que el ahorro de las familias es igual a la inversión de las empresas.

$$I_t = S_t \qquad (3)$$

La función de producción utilizada tiene propiedades neoclásicas; el producto se obtiene de la combinación de tres factores fundamentales: dos tangibles y rivales, trabajo (L) y capital (K) y uno intangible y no rival, la tecnología (A). El factor trabajo considera a todos los trabajadores de la economía y es un factor no acumulable. El factor capital se refiere a los bienes materiales que las empresas utilizan en el proceso de producción; la rivalidad de estos factores se refiere a que un recurso sólo puede ser utilizado por un usuario a la vez, con un solo proceso. La tecnología se refiere a la técnica, conocimientos o avances de un país; su no rivalidad se explica porque una misma técnica o fórmula puede ser usada por más de una empresa a la vez. El aumento de la producción en esta economía puede aumentar por el incremento de cualquiera de estos factores.

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t) \qquad (4)$$

Las propiedades de la función de producción se resumen en:

Rendimientos constantes a escala (homogeneidad de grado 1). Si doblamos la cantidad de capital y trabajo la producción también se duplicará.

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t, A_t) = \lambda F(K_t, L_t, A_t) \qquad (5)$$

La productividad marginal de todos los factores de producción es positiva pero decreciente.

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \qquad (6.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \qquad (6.2)$$

Las condiciones de Inada.

$$Lim_{K\to\infty} \partial F/\partial K = 0; \qquad Lim_{K\to 0} \partial F/\partial K = \infty \qquad (7.1)$$

$$Lim_{L\to\infty} \partial F/\partial L = 0; \qquad Lim_{L\to 0} \partial F/\partial L = \infty \qquad (7.2)$$

Los supuestos adicionales que se añaden al modelo son:

Tasa de ahorro constante (s), es decir, el nivel de ahorro es una fracción constante de la renta, de (1) se puede deducir (8.2),

$$sY_t = S_t = I_t \qquad (8.1)$$

$$C_t = (1-s)Y_t \qquad (8.2)$$

Tasa de depreciación constante (δ). La inversión bruta, I_t, es igual a la inversión neta (aumento neto del stock de capital, $\overset{o}{K}_t$) más la depreciación, D_t.

$I_t = \dot{K}_t + D_t = \dot{K}_t + \delta K_t$ (9)

Reemplazando (4), (8.1) y (9) en (1) obtenemos:

$F(K_t, L_t, A_t) = (1-s)F(K_t, L_t, A_t) + \overset{\circ}{K}_t + \delta K_t$ (10.1)

Donde se puede reordenar:

$\dot{K}_t = sF(K_t, L_t, A_t) - \delta K_t$ (10.2)

La población crece a una tasa de crecimiento constante (n), el trabajo de la economía es igual a la población.

$\overset{\circ}{L}_t = nL_t$, o expresado como

$L_t = e^{nt} L_\circ$ (11)

Tasa de crecimiento de la tecnología constante (g). A pesar de que se podría plantear un nivel de tecnología constante (con tasa de crecimiento igual a cero).

$\overset{\circ}{A}_t = gA_t$; o expresado

$A_t = e^{gt} A_0$ (12)

Además, la tecnología es trabajo-aumentativa.

$\dot{K}_t = sF(K_t, (A_t L_t)) - \delta K_t$ (13)

La Ecuación de Movimiento de Capital Per cápita Efectivo

Estos supuestos adicionales permiten deducir los siguientes resultados en unidades por trabajo efectivo, es decir, dividiendo las variables agregadas por $A_t L_t$:

$k_t = \dfrac{K_t}{A_t L_t}$; o expresado de la siguiente manera

$K_t = kA_t L_t$ (14a)

Derivando respecto al tiempo:

$\overset{\circ}{K}_t = A_t L_t \overset{\circ}{k}_t + A_t k_t \overset{\circ}{L}_t + L_t k_t \overset{\circ}{A}_t$ (14b)

Dividiendo (13) entre $A_t L_t$, y luego reemplazando (14.b)

$$\frac{\overset{\circ}{K}_t}{A_t L_t} = sF\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1\right) - \delta \frac{K_t}{A_t L_t} \qquad (15)$$

Reemplazando (14.b) en (15), y teniendo en cuenta que $f(k_t) = F\left(\dfrac{K_t}{A_t L_t}, 1\right)$

$\overset{\circ}{k}_t + nk_t + gk_t = sf(k_t) - \delta k_t$

Despejando la variación de capital per cápita efectivo neto

$\overset{\circ}{k}_t = sf(k_t) - (n + \delta + g)k_t$ (16)

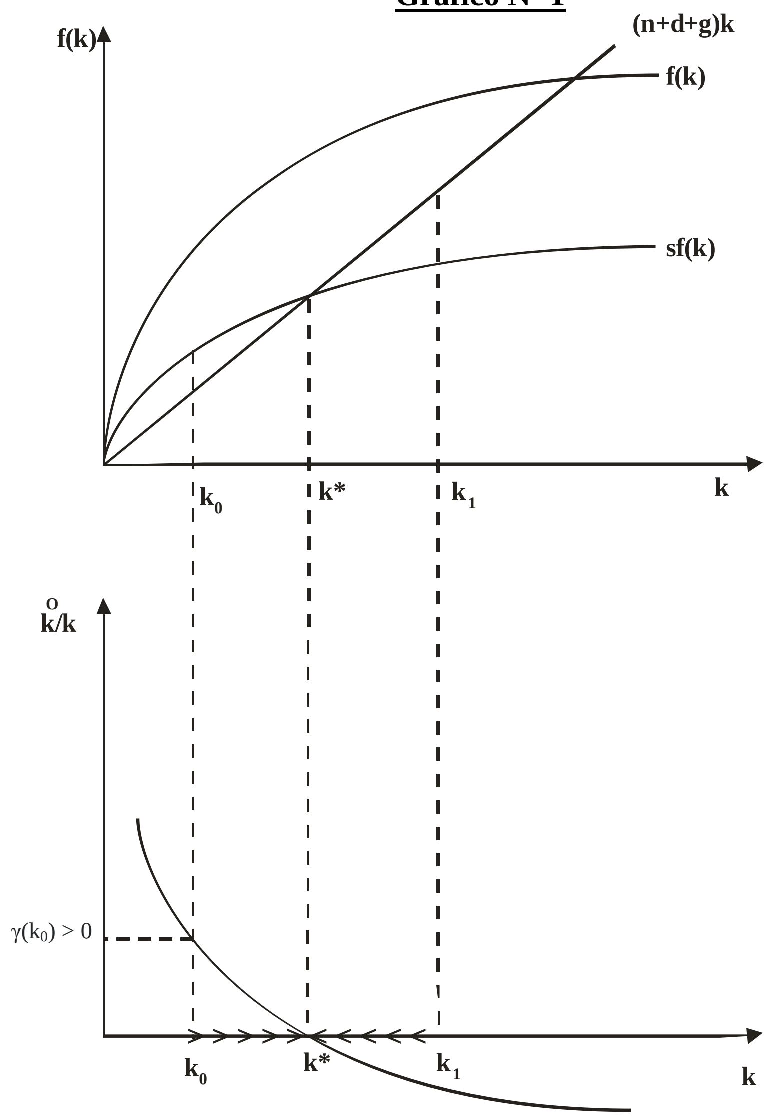
La ecuación de movimiento de capital (16), explica que el capital por trabajador efectivo aumenta con la diferencia entre el ahorro bruto de la economía $sf(k_t)$ y el término $(n + \delta + g)k_t$. Se puede observar que δk_t se orienta a restituir el capital per cápita

desgastado; el término $(n+g)k_t$ representa el capital que se destina para las nuevas unidades de trabajo efectivo que entran en el proceso productivo.
Si asumimos una tecnología constante, la ecuación (16) se convierte en $\overset{\circ}{k}_t^{'} = sf\left(k_t^{'}\right) - (n+\delta)k_t^{'}$, donde $k_t^{'}$ está en términos per cápita, $K_t \big/ L_t$, y no en términos de trabajo efectivo, $K_t \big/ A_t L_t$.

Estabilidad y Estado Estacionario
La economía alcanza el estado estacionario se cuando la variación de capital por trabajador efectivo se iguala a cero. Esto ocurre en $k*$, donde se cumple $sf(k*) = (n+g+\delta)k*$, lo que asegura que $\overset{\circ}{k} = 0$ Se observa que si no existe progreso técnico se tiene:

$$sf(k') = (n+\delta)k' \qquad (17)$$

<u>Grafico Nº 1</u>



En el gráfico 1 se muestra que si k es menor que $k*$, tendremos que el crecimiento del capital es positivo $\gamma(k_0) > 0$, de manera similar si k es mayor que $k*$ tendremos $\gamma(k_1) < 0$, podemos concluir que $k*$ es un punto estable.

El Capital Per cápita Efectivo de la Regla de Oro

El capital por trabajador efectivo de la regla de oro (k^{GR}) es aquel que maximiza el consumo y se obtiene de $f'\left(k^{GR}\right) = n + \delta + g$. La economía alcance el nivel de consumo máximo cuando la tasa de ahorro de la población es igual a la proporción destinada a la remuneración del factor capital o participación de capital $\alpha(k)$. Esto se deduce de la siguiente maximización:

$$\underset{k}{Max} \quad c = f(k) - (n + \delta + g)k \qquad (18)$$

Donde la condición de primer orden se resume en:

$$\frac{\partial c}{\partial k} = f'(k) - (n + \delta + g) = 0 \qquad (19.1)$$

La condición de segundo orden asegura que se trata de un máximo.

$$\frac{\partial^2 c}{\partial k^2} = f''(k) < 0 \qquad (19.2)$$

La ecuación (19.1) se complementa con la condición de estado estacionario y obtenemos:

$$f'(k) = n + \delta + g = s\frac{f(k)}{k} \qquad (20)$$

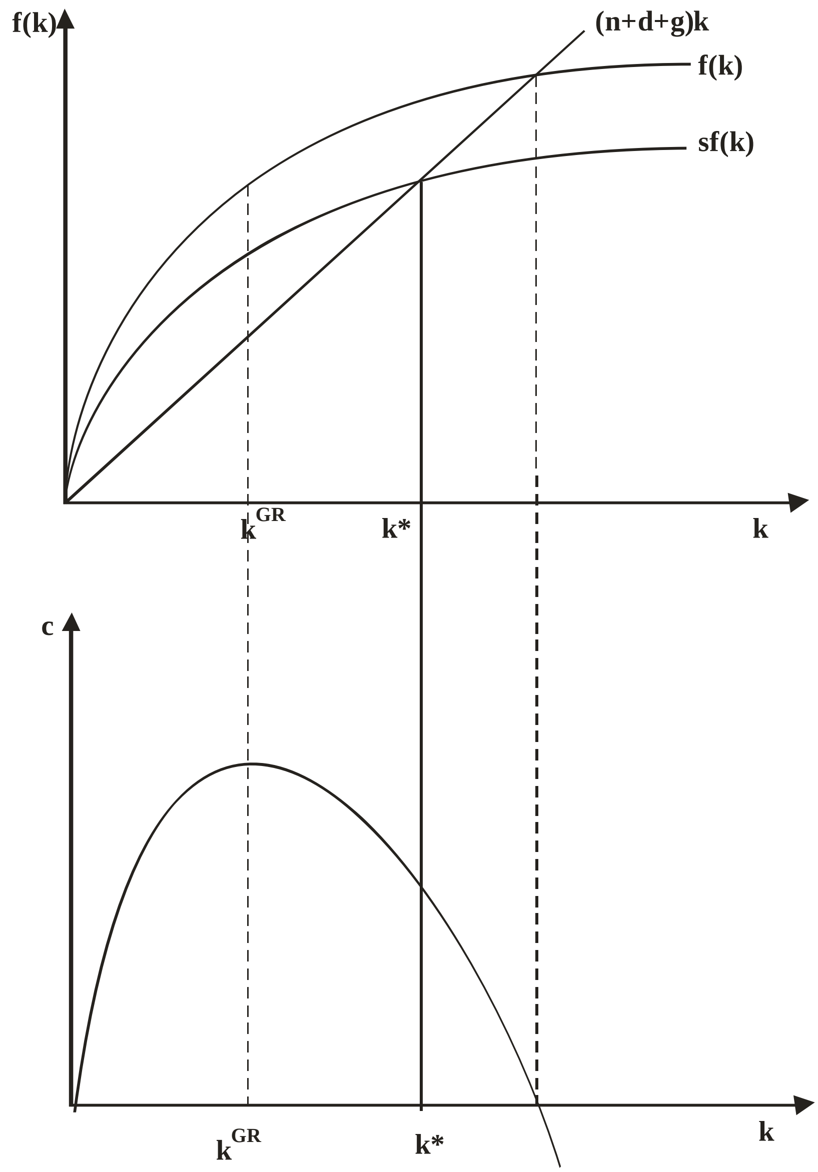
Despejando la tasa de ahorro necesaria para alcanzar k^{GR}

$$s = \frac{kf'(k)}{f(k)} = \alpha(k) \qquad (21)$$

Ineficiencia Dinámica

El gráfico 2 muestra el caso de ineficiencia dinámica o intertemporal, esto ocurre cuando $k* > k^{GR}$. La situación de sobreahorro se da cuando $s > \alpha$, lo cual es ineficiente puesto que la sociedad puede obtener un mayor consumo per cápita con una tasa de ahorro menor y por ende una mayor utilidad. A la derecha de k^{GR}, se ubica la zona de ineficiencia dinámica.

<u>**Grafico Nº 2**</u>



Conclusiones

El Modelo de Solow-Swan concluye que el capital, el consumo y la producción en términos de trabajo efectivo ($K_t / A_t L_t$, $C_t / A_t L_t$, $Y_t / A_t L_t$) se mantienen constantes. Las variables per cápita (K_t / L_t , C_t / L_t , Y_t / L_t) crecen a la tasa g. Por otro lado, el Capital, el Consumo y la Producción agregados (K_t , C_t , Y_t) crecen a la misma tasa ($n+g$).

Los resultados del modelo de Solow-Swan cuando no existe progreso tecnológico ($g=0$) son:

La tasa de crecimiento de la renta per cápita es menor cuando mayor es el nivel de renta.

Los salarios reales deben ser mayores en países con mayor nivel de renta.

El tipo de interés real es menor en países con mayor nivel de renta.

De estos se desprende las siguientes implicaciones:

Países con similares variables exógenas (n, δ, α, g, s) tienden al mismo nivel de renta per cápita.
El nivel de renta de un país está correlacionado positivamente con la tasa de ahorro (inversión).
La tasa de crecimiento de la renta per cápita esta directamente relacionada con la tasa de inversión de un país.

Críticas del modelo

Las dos principales críticas al modelo son:
La evidencia empírica rechaza la convergencia a un estado de estado estacionario común de todas las economías (Convergencia Absoluta), la productividad marginal decreciente del factor capital debería sustentar que países pobres tengan tasas de crecimiento más altas que países ricos.
La Convergencia Condicional enfatiza que cada economía tiende a su propio estado estacionario, en este sentido una economía rica podría crecer a tasas más altas que una economía pobre, a pesar de la productividad marginal decrecientes del factor capital; dos economías tendrán el mismo estado estacionario si, además de la similitud de las variables exógenas del modelo, las economías tienen semejanzas en otros aspectos (institucionales, estructura de mercado, etc.).
La otra crítica es teórica y se refiere a la posibilidad de ineficiencia dinámica en el modelo, que en una situación de individuos maximizadores, racionales no debería ocurrir. Esta crítica es solucionada al incluir una función objetivo, que posteriormente es presentado por Cass y Koopmans.

La función de producción Cobb-Douglas

La función de producción más utilizada es la Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \qquad (22)$$

Esta función muestra una participación constante entre trabajadores (dueños de L) y capitalistas (propietarios de K), cada factor es remunerado de acuerdo a su productividad marginal, además la función de producción Cobb-Douglas cumple con las propiedades de la función de producción neoclásica. Además con esta función el pago a factores agota la producción como se muestra en (23.3)

$$\text{Renta de Capital} = \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t = \alpha Y_t \qquad (23.1)$$

$$\text{Renta del Trabajo} = \frac{\partial F}{\partial L_t} L_t = (1-\alpha) Y_t \qquad (23.2)$$

$$K \frac{\partial F}{\partial K} + L \frac{\partial F}{\partial L} = Y \qquad (23.3)$$

Con la función de producción tipo Cobb-Douglas la participación del capital es constante:

$$\alpha(k_t) = \alpha$$

3. El Modelo de Ramsey Cass Koopmans

Cass (1965) y Koopmans (1965) a partir del enfoque de optimización intertemporal de Ramsey (1928), presentan una nueva variante del modelo neoclásico de crecimiento, utilizando el instrumental matemático de control óptimo, y plantean el modelo más famoso de la teoría de crecimiento actual.

Existen dos enfoques para resolver el modelo (dictador benefactor o planificador y de mercados competitivos) y ambos llegan a los mismos resultados.

Supuestos
El problema del planificador empieza con un producto único que es distribuido entre consumo e inversión,

$$C_t + I_t = Y_t \qquad (1)$$

La función de producción tiene características neoclásicas desarrolladas en el apartado anterior (productividad marginal positiva y decreciente, condiciones de Inada).

$$Y = F(K_t, L_t, A_t) \qquad (4)$$

La función de acumulación de capital está dada por la inversión bruta deducida por la depreciación del capital

$$\overset{\circ}{K} = I_t + C_t - \delta K_t$$

$$\overset{\circ}{K} = Y_t - C_t - \delta K_t$$

$$\overset{\circ}{K} = F(K, L, A) - C_t - \delta K_t \qquad (15)$$

Se considera a la tecnología trabajo aumentativa (como en el caso del modelo de Solow) y se tiene las ecuaciones en términos per cápita efectivos:

$$\overset{\circ}{k} = f(k) - c_t - (n + \delta + g)k_t \quad (24)$$

La ecuación (24) es similar a la obtenida en el modelo de Solow, si se considera $f(k) - c_t = sf(k_t)$, pero en este caso la tasa de ahorro s es determinado endógenamente (es un resultado del modelo). Esta ecuación es considerada como ecuación de factibilidad.
El modelo considera además que las familias tienen una función de utilidad, que depende únicamente del consumo per cápita, por lo tanto; la utilidad de la sociedad equivale a la utilidad per cápita por el número de personas que la componen.

$$V = u(c_t)L_t$$

Además las utilidades futuras son descontadas a la tasa ρ, con lo que se obtiene:

$$\text{Utilidad Total} = \int_0^\infty e^{-\rho t} V dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} L_t u(c_t) dt \qquad (25)$$

La población crece a una tasa constante n, donde se obtiene:

$$\overset{\circ}{L_t} = nL_t$$

$$L_t = L_0 e^{nt} \qquad (11)$$

Reemplazando (11) en (25)

$$U.T = \int_0^\infty e^{-\rho t} L_0 e^{nt} u(c_t) dt$$

$$U.T = L_0 \int_0^\infty e^{-(\rho - n)t} u(c_t) dt \qquad (26)$$

El problema de maximización del planificador se resume en:

$$\text{Max.} \quad L_0 \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a} \quad \overset{\circ}{k} = f(k) - c_t - (n+\delta+g)k_t \qquad (27.1)$$

En este caso $L_0 > 0$, por lo que el problema (27.1) puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\text{Max.} \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

$$\text{s.a} \quad \overset{\circ}{k} = f(k_t) - c_t - (n+\delta+g)k_t \qquad (27.2)$$

El nivel de capital inicial de la economía es positivo y conocido $k_0 > 0$, además para que la función objetivo este acotada debe cumplirse que $\rho - n > 0$.

Condiciones de Primer Orden

La solución al problema se obtiene utilizando control óptimo, para lo cual se construye el Halmitoniano

$$H = e^{-(\rho-n)t} U(c_t) + \lambda\left[f(k_t) - c_t - (n+\delta+g)k_t \right] \qquad (28)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\underset{c}{Max} \quad H \qquad (29.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \lambda_t \left[f'(k_t) - (n+\delta+g) \right] = -\overset{\circ}{\lambda}_t \qquad (29.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = f(k_t) - c_t - (n+\delta+g)k_t = \overset{\circ}{k}_t \qquad (29.3)$$

$$\text{Lim}_{t\to\infty}(k_t \lambda_t) = 0 \qquad (29.4)$$

La condición de transversalidad (29.4) asegura que el problema tenga solución. La ecuación (29.1) maximiza del Hamiltoniano en función de c_t, donde asumimos una solución interna por las características de las funciones de Utilidad y de Producción, y teniendo en cuenta que $k_t > 0$ y $c_t > 0$, así se puede expresar la ecuación (29.1) como:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-(\rho-n)t} u'(c_t) - \lambda_t = 0 \qquad (29.1)'$$

Reduciendo el sistema formado por las ecuaciones (29.1)'; (29.2) y (29.3) a un sistema con 2 ecuaciones:

$$\overset{\circ}{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta+g)k_t \qquad (30.1)$$

$$\frac{\overset{\circ}{c}_t}{c_t} = \frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)} \left[f'(k_t) - (\rho+\delta+g) \right] \qquad (30.2)$$

Estado Estacionario

Ahora se puede analizar el estado estacionario; para esto, se asume que en el estado estacionario k y c se mantienen constantes por lo que $\overset{\circ}{k}$ y $\overset{\circ}{c}$ son iguales a cero,

$$f(k^*)-c^*-(n+\delta+g)k^*=0 \qquad (31.1)$$

$$f'(k^*)-(\rho+\delta+g)=0 \qquad (31.2)$$

De (31.1) se despeja

$$c^*=h(k^*) \qquad (32.1)$$

De (31.2) se obtiene

$$k^*=[f']^{-1}(\rho+\delta+g) \qquad (32.2)$$

Reemplazando (32.2) en (32.1)

$$c^*=h\{[f']^{-1}(\rho+\delta+g)\} \qquad (32.3)$$

Es preferible, para las demostraciones y ejercicios de estática comparativa utilizar la solución implícita de las variables en estado estacionario, en este informe se utilizará las ecuaciones (31.1) y (31.2).

Condiciones de Segundo Orden

El Hamiltoniano (28) es cóncavo bajo, de acuerdo al Teorema de Mangasarian, puesto que $u(c_t)$ y $f(k_t)-c_t-(n+\delta+g)k_t$ son cóncavos respecto a c_t y k_t, y $\lambda_t>0$; o mediante la Hesiana del Hamiltoniano, que es definida negativa (tiene raíces características negativas), lo que asegura que se trata de un punto máximo.

$$Hes(Hamiltoniano)(c^*,k^*,\lambda^*,t)=\begin{bmatrix} e^{-(\rho-n)t}u''(c^*) & 0 \\ 0 & \lambda^* f''(k^*) \end{bmatrix}$$

Dinámica del Modelo

El siguiente paso consiste en analizar la dinámica del modelo, para esto se toman las dos variables más relevantes del modelo c_t y k_t.

Las curvas $\overset{o}{c}_t=0$ y $\overset{o}{k}_t=0$ están representadas en el gráfico 3, se observa la dinámica de los puntos fuera de estas curvas. El primer gráfico muestra que a la izquierda de la curva $\overset{\circ}{c}=0$; se tiene $\overset{o}{c}_t>0$ que se obtiene de (30.2); de manera similar a la derecha se observa que $\overset{o}{c}_t<0$

$$\frac{\partial(\overset{\circ}{c})}{\partial k_t}=-\frac{c_t u'(c_t)}{u''(c_t)}.f''(k_t)<0 \qquad (33)$$

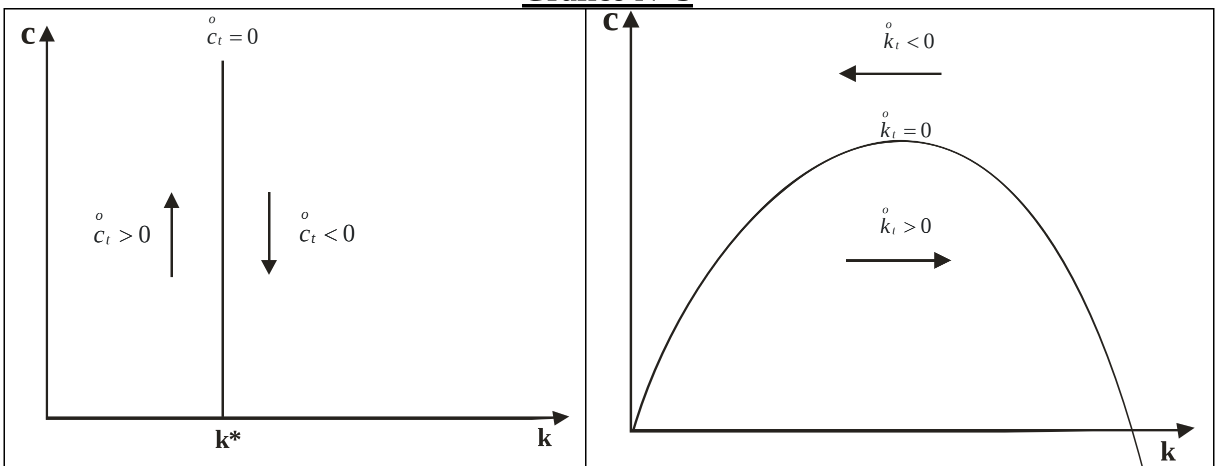
El término $\dfrac{-c_t u'(c_t)}{u''(c_t)}=\dfrac{1}{\sigma(c_t)}$ es positivo dado que $c_t>0$; $u'(c_t)>0$ y $u''(c_t)<0$, por lo que a medida que aumenta el capital la variación del consumo va reduciéndose, puesto que $f''(k_t)<0$. El término $\sigma(c_t)$ es la elasticidad de la Utilidad Marginal respecto al consumo.

El segundo gráfico muestra la representación del análisis de la dinámica de k_t; donde se tiene la curva $\overset{o}{k}_t=0$; por encima de esta curva el capital se reduce ($\overset{o}{k}_t<0$) y por debajo de la misma, el capital tiende a aumentar ($\dot{k}_t > 0$). Esta conclusión es obtenida de la ecuación (30.1)

$$\frac{\partial(\dot{k}_t)}{\partial c_t} = -1 < 0 \qquad (34)$$

Donde se muestra una relación negativa entre la acumulación de capital y el consumo.

<u>Grafico Nº 3</u>



3.a Dinámica del consumo per cápita efectivo c.

3.b Dinámica del capital per cápita efectivo k.

El Jacobiano nos da una demostración formal del punto de silla que resulta del análisis gráfico de las ecuaciones diferenciales (30.1) y (30.2). Para ello se linealiza el sistema y se evalúa el Jacobiano en estado estacionario.

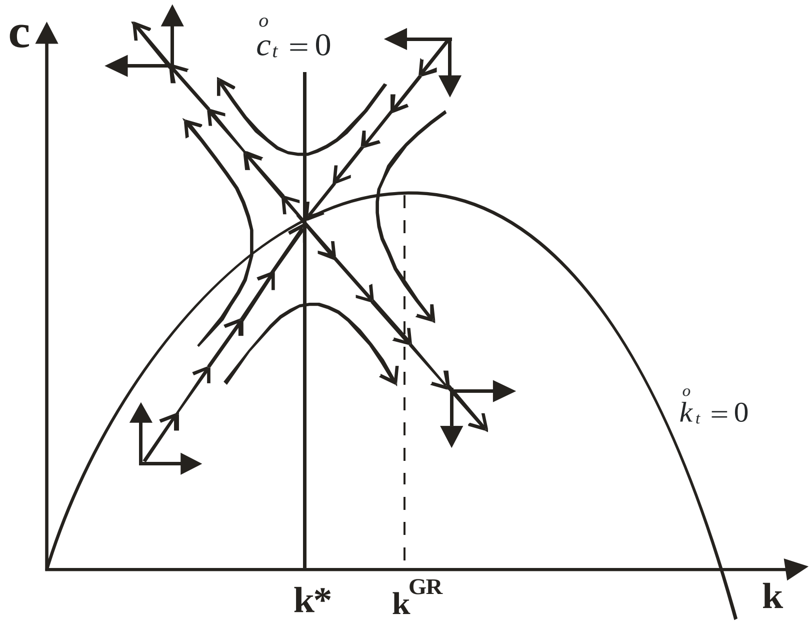
$$J = \left[\frac{\partial(\dot{k},\dot{c})}{\partial(k,c)}\right]_{(k^*,c^*)} = \begin{bmatrix} \rho - n & -1 \\ \dfrac{c^*}{\sigma(c^*)} f''(k^*) & 0 \end{bmatrix}$$

Cuyas raíces características son:

$$v_{1,2} = \frac{(\rho - n) \pm \sqrt{(\rho - n)^2 - 4\dfrac{c^*}{\sigma(c^*)} f''(k^*)}}{2}, \text{ donde } -4\frac{c^*}{\sigma(c^*)} f''(k^*) > 0$$

Por lo que tendremos una raíz positiva y otra negativa, lo que confirma el punto de silla obtenido con el análisis gráfico.

<u>Gráfico 4</u>



Ineficiencia Dinámica

El gráfico 4 muestra la senda de equilibrio (SE) que lleva a la economía al estado estacionario, además que $k^* < k^{GR}$, puesto que:

$$k^* = [f]^{-1}(\rho + \delta + g) < [f']^{-1}(n + \delta + g) = k^{GR}$$

$$k^* < k^{GR}$$

Tenemos que

$f'(k^*) = \rho + \delta + g$,

$f'(k^{GR}) = n + \delta + g$, y

$\rho > n$

Por lo que

$f'(k^*) > f'(k^{GR})$

Como la función $f'(k)$ es decreciente, un capital mayor tendrá una productividad menor, por lo tanto $k^* < k^{GR}$. Este resultado asegura que no existe la posibilidad de sobreahorro, con esto, el modelo de Ramsey Cass Koopmans supera la posibilidad de ineficiencia dinámica del modelo de Solow.

Convergencia Absoluta y Convergencia Condicional

Las conclusiones respecto a la convergencia son similares a las del modelo de Solow. La convergencia absoluta menciona que todos los países convergen a un nivel estacionario común, es decir que las economías pobres alcanzan a las ricas debido a las productividades marginales decrecientes del capital. La convergencia condicional, en cambio, indica que las economías convergen a su propio estado estacionario, es decir, que un país rico podría crecer a una tasa mayor que la de un país pobre, aún teniendo en cuenta la productividad marginal decreciente del capital.

Implicancias del Modelo Neoclásico

Se puede analizar el estado estacionario del modelo, de (31.1) y (31.2), tenemos

$$f'(k*) = \rho + \delta + g \qquad (35.1)$$
$$c* = f(k*) - (n + \delta + g)k* \qquad (35.2)$$

<u>El capital</u>

El capital per cápita efectivo en estado estacionario depende de las variables $\rho + \delta + g$, $k*$ disminuye cuando cualquiera de estas variables aumenta, así tenemos:

$$Dk* = \frac{1}{f''(k*)}[D\rho + D\delta + Dg] \qquad (36)$$

Si se considera la participación de capital $\alpha(k)$ constante en el estado estacionario. Para esto usamos la función de producción Cobb-Douglas (22), que podemos llevarlo a términos per cápita.

$$f(k) = k^{\alpha} \qquad (37)$$

En estado estacionario tendremos que el nivel de capital será:

$$k* = \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$y* = \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

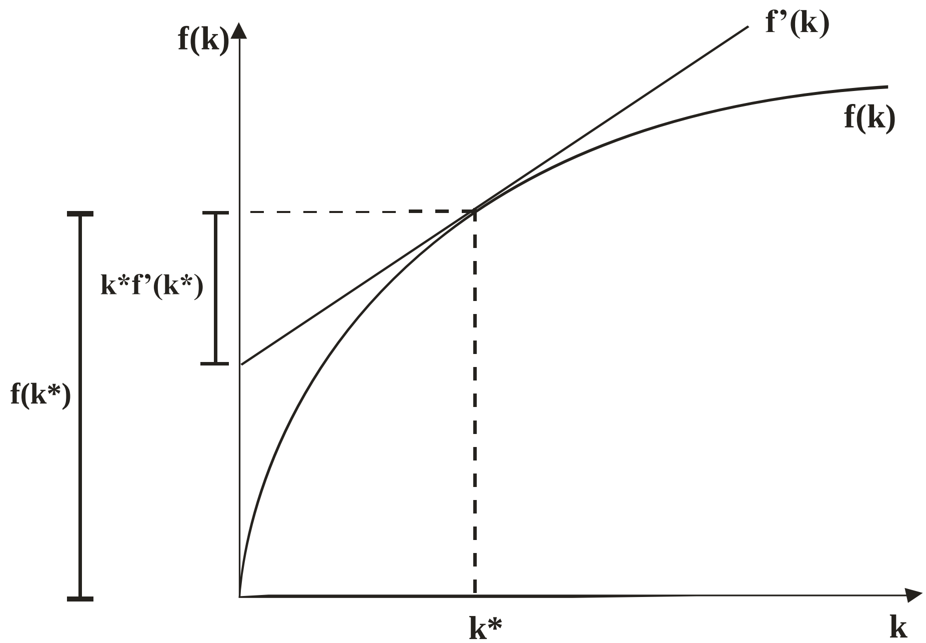
Derivando respecto a α tendremos:

$$\frac{\partial k*}{\partial \alpha} = \frac{k*(1 - Lny*)}{\alpha(1-\alpha)} \qquad (38)$$

El término $\frac{k*}{\alpha(1-\alpha)}$ es mayor a cero, mientras que el signo de $(1 - Lny*)$ es discutible, sin embargo se esperaría valores para $y*$ menores a 1, puesto que es de esperar que ρ sea mayor a α, por lo que $Lny* < 0$.

$$\frac{\partial k*}{\partial \alpha} > 0$$

<u>Gráfico 5</u>



El consumo

Analizar el caso del consumo per capita efectivo es más complicado.

$$Dc^* = \left[f'(k^*) Dk^* - k^*(D\rho + D\delta + Dg) \right] - (n+\delta+g) Dk^*$$

$$Dc^* = \left[f'(k^*) - (n+\delta+g) \right] Dk^* - k^*(Dn + D\delta + Dg)$$

$$Dc^* = (\rho - n) Dk^* - k^*(Dn + D\delta + Dg)$$

$$Dc^* = \frac{(\rho-n)}{f''(k^*)}\left[D\rho + D\delta + Dg \right] - k^*(Dn + D\delta + Dg)$$

$$Dc^* = \frac{(\rho-n)}{f''(k^*)} D\rho - k^* Dn - \left(k^* - \frac{\rho - n}{f''(k^*)} \right)\left[D\delta + Dg \right] \qquad (39)$$

Que puede expresarse separadamente:

$$\frac{\partial c^*}{\partial \rho} = \frac{\rho - n}{f''(k^*)} < 0$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial n} = -k^* < 0$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial \delta} = \frac{\partial c^*}{\partial g} = -\left(k^* - \frac{\rho - n}{f''(k^*)} \right) < 0$$

Se observa una relación negativa entre el consumo per cápita y, la tasa de descuento ρ y la tasa de crecimiento n, la tasa de depreciación δ y la tasa de crecimiento de la tecnología g. Si utilizamos la función de producción Cobb-Douglas tendremos

$$\frac{\partial c^*}{\partial \alpha} = \frac{(\rho - n)k^*(1 - Lny^*)}{\alpha_k (1 - \alpha_k)} > 0$$

Donde se observa una relación positiva entre c^* y α.

Producción, retorno del capital y salarios

Si asumimos que z puede ser cualquiera de nuestras variables exógenas (excepto para $z=\alpha$), obtendremos:

$$\frac{\partial y^*}{\partial z} = f'(k^*)\frac{\partial k}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial z} = f''(k^*)\frac{\partial k}{\partial z},$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = (1-\alpha)f'(k^*)\frac{\partial k}{\partial z}$$

Usando (36), se observa que el producto per cápita y el salario tienen una relación inversa con ρ, δ y g; mientras que la tasa de retorno de capital tendrá una relación positiva con respecto a las mismas variables exógenas. Utilizando la función de producción tipo Cobb-Douglas (22) tendremos:

$$\frac{\partial y^*}{\partial \alpha} = \frac{y^*(1-Lny^*)}{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial \alpha} = y^*(1-Lny^*)$$

Donde se muestra la relación de la participación del capital, nula con el retorno de capital y, positiva con el producto y el salario.

4. Hechos estilizados del crecimiento económico

Para evaluar la relevancia empírica del modelo, analizó los resultados de los estudios hechos por Kaldor y Romer.

Hechos estilizados de Kaldor (1963)

<u>Producto per cápita crece a través del tiempo y este ratio de crecimiento no tiende a disminuir.</u>

Esta afirmación es válida para el caso del modelo neoclásico con progreso tecnológico, en este caso la economía crece a la tasa g; sin embargo, podría modelarse la tasa de crecimiento del progreso tecnológico de manera diferente como

$$\ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right) = gt + \varepsilon_t \qquad (40)$$

Donde ε_t es un ruido blanco, y este ruido generaría los diferentes ratios de crecimiento en diferentes períodos.

<u>Capital per cápita crece a través del tiempo.</u>

En este modelo, el capital per cápita crece a una tasa constante g tenemos que:

$\tilde{k}^* = \frac{K}{AL} = \text{cte.}$, $\frac{\left(K/L\right)}{A} = \text{cte.}$,

De donde se puede obtener $\frac{\left(\overset{\circ}{K/L}\right)}{\left(K/L\right)} - \frac{\overset{\circ}{A}}{A} = 0$, luego:

$$\frac{\overset{\circ}{K}}{K} = g \qquad (41)$$

<u>El ratio de retorno de capital es casi constante.</u>

En el modelo sólo se cumple en estado estacionario ($r^* = f'(k^*) = n + \delta + g$) o cerca del estado estacionario, cuando el capital está por debajo de k^* la productividad del capital va disminuyendo.

<u>El ratio de capital físico – producto es cercano a un valor constante.</u>

Podemos partir de la expresión:

$$\text{Ratio de capital físico - producto} = \frac{K}{Y} = \frac{\frac{K}{AL}}{\frac{F(K, AL)}{AL}} = \frac{k}{f(k)} \qquad (42)$$

Se observa que el hecho se cumple en el modelo sólo cuando la economía está en estado estacionario o cerca de ese estado. De acuerdo al modelo cuando la economía está a la izquierda de k^*, $\frac{k}{f(k)}$ aumenta hasta llegar a $\frac{k^*}{f(k^*)} = cte$.

<u>Las participaciones de trabajo y capital físico en el ingreso nacional son casi constantes.</u>

Si tomamos en cuenta la función de producción Cobb-Douglas, obtenemos a partir de

$$F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \qquad (43.1)$$

$$\frac{KF_K(K, AL)}{F(K, L)} = \alpha \qquad (43.2)$$

$$\frac{L.F_L(K, AL)}{F(K, L)} = 1 - \alpha \qquad (43.3)$$

El supuesto de una función tipo Cobb -Douglas podría explicar este hecho estilizado. Con esta función, la participación de capital y la participación del trabajo son constantes como afirma este hecho estilizado.

<u>El ratio de crecimiento de producto por trabajador difiere a través de los países.</u>

Este hecho contradice la convergencia absoluta, ante esto surge la hipótesis de la convergencia condicional. El modelo no toma en cuenta la condición política del país, las externalidades y otros factores que afectan al crecimiento. La diferencia del producto per cápita podría ser explicada por la diferencia de las condiciones iniciales o distintas tecnologías entre países, por ejemplo.

Hechos estilizados de Romer (1989)

<u>La tasa de crecimiento no varía con el nivel de renta per cápita.</u>
De acuerdo al modelo la tasa de crecimiento tiene relación inversa con el nivel de renta per cápita.

$$\overset{\circ}{k}_t = f(k_t) - C_t - (n + \delta + g)k_t \qquad (44.1)$$

$$\frac{\overset{\circ}{k}_t}{k} = \frac{f(k_t)}{k_t} - \frac{C_t}{k_t} - (n + \delta + g) \qquad (44.2)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{\overset{\circ}{k}}{k}\right)}{\partial k}\right|_{c_t=\bar{c}} = \frac{k_t f'(k_t) - f(k)}{k_t^2} < 0 \qquad (44.3)$$

Donde la tasa de crecimiento disminuye a mayores niveles de capital per cápita (o ingreso per cápita)

<u>El crecimiento económico esta correlacionado con el del volumen del comercio.</u>
El modelo no incluye el volumen de comercio dentro de su análisis.

<u>Las tasas de crecimiento de la población están correlacionadas negativamente con el nivel de renta.</u>
Esta relación es la misma que se obtiene del modelo en estado estacionario, donde se muestra:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial n} = f'(k)\frac{\partial k^*}{\partial n} < 0 \qquad (45)$$

<u>La tasa de crecimiento de los factores productivos no es suficiente para explicar el crecimiento del producto per cápita.</u>
Esta definición tiene relevancia empírica y teórica, estudios como el de Romer muestran que la mayor parte del crecimiento económico es explicado por el residuo de Solow lo que se aproxima en muchos casos al progreso tecnológico. Una forma de modelar los demás factores en el modelo se observa en la ecuación (40).

<u>Los trabajadores, cualificados o no, tienden a emigrar de los países de renta baja a los que tienen renta alta.</u>
Romer muestra evidencia empírica acerca de este punto, lo que a nivel de la teoría es también compatible. Sin embargo el modelo no presenta dicho análisis y escapa a los alcances del modelo expuesto.

5. Conclusiones del modelo neoclásico

El modelo neoclásico es, sin duda, una herramienta teórica muy importante en el estudio del crecimiento económico. El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans es microfundamentado, lo que lo aproxima a la realidad, evitando así la posibilidad de sobreahorro (ineficiencia dinámica) que presentaba el modelo de Solow-Swan. Además, el modelo neoclásico utiliza las herramientas matemáticas más sofisticadas que las empleadas por el modelo de Solow-Swan.

Un avance importante es la inclusión de la tecnología en el modelo, intentando así explicar como afecta el progreso tecnológico en la economía, sin embargo el supuesto de tasa de crecimiento constante del progreso tecnológico lo aleja de la realidad.

Otro intento para reforzar tanto el modelo de Solow-Swan como el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, es la inclusión de los conceptos de convergencia condicional y convergencia absoluta, puesto que la hipótesis de convergencia a un estado estacionario de todas las economías fue rechazada por la evidencia empírica.

Los resultados del modelo en estado estacionario muestran relaciones negativas entre el capital per cápita efectivo y la tasa de crecimiento de la tecnología; la tasa de depreciación y la tasa de descuento de la utilidad. Por otro lado el modelo concluye también relaciones negativas entre el consumo per cápita efectivo y, la tasa de crecimiento de la población, la tasa de crecimiento de la tecnología, la tasa de depreciación y el factor de descuento de la utilidad. Sin embargo, es necesario hacer un estudio más profundo al estudiar los efectos de la tasa de crecimiento de tecnología y cómo su variación afecta al capital per cápita y al consumo per cápita; puesto que en este caso el análisis del capital y del consumo per cápita efectivos no tienen una relación directa con los resultados en el análisis del capital y consumo per cápita efectivos (como ocurren con las demás variables exógenas).

El modelo neoclásico presenta conclusiones simples de la relación entre las variables exógenas y endógenas del modelo; sin embargo, estas conclusiones son teóricamente correctas bajo los supuestos de un ambiente neoclásico, que no necesariamente coinciden con la realidad.

Ante todo, la evidencia ha mostrado que el crecimiento no se puede resumir en pocas variables; en efecto la realidad es más compleja. Ahí se concentran las críticas al modelo neoclásico.

Sin embargo, esta simplicidad ha hecho del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans uno de los más importantes en el área del estudio del crecimiento económico. El modelo neoclásico ha sido ampliamente revisado, incluso por sus detractores, convirtiéndose en el modelo de mayor estudio en los cursos de pregrado, e incluso de post grado.